Lý thuyết Mạch II
(Cơ sở kỹ thuật điện II)

PGS. TSKH. Trần Hoài Linh
Viện Điện, trường ĐHBK Hà Nội
linh.tranhoai@hust.edu.vn, thlinh2000@yahoo.com

Nội dung môn học

- Thời lượng lên lớp: 3 tiết/tuần
- Thí nghiệm: liên hệ thày Nguyễn Văn Thực
- Kiểm tra giữa kỳ: khoảng tuần 8 – 10
- Kiểm tra cuối kỳ: đề chung toàn khoa.
- Cấu trúc đề thi: 3 bài (9 điểm) + 1 điểm trình bày
- Chú ý: tự luyện tập kỹ năng do không có giờ bài tập, không có bài tập lớn.
- Một số bài tập cũ tham khảo:

Nội dung môn học

Phần I: Mạch tuyến tính ở chế độ xác lập

Phần II: Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

Phần III: Mạch phi tuyến (xác lập, quá độ)

Phần IV: Đường dây dài (xác lập, quá độ)

Nội dung môn học

Phần II: Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

Chương 10. Các hiện tượng cơ bản

Chương 11. Phương pháp tích phân kinh điển

Chương 12. Phương pháp toán tử Laplace

Nội dung môn học

Phần III: Mạch phi tuyến (xác lập, quá độ)

1. Các phần tử và các hiện tượng cơ bản trong mạch phi tuyến:
2. Chế độ xác lập:
   – Nguồn DC: chế độ hằng
   – Nguồn AC: chế độ dừng
   – Xếp chồng DC+AC: phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Nội dung môn học

Phần III: Mạch phi tuyến (xác lập, quá độ)

3. Chế độ quá độ:
   - Các vấn đề chung
   - Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn
   - Phương pháp các bước sai phân

Nội dung môn học

Phần IV: Đường dây dài (xác lập, quá độ)

1. Các khái niệm cơ bản của đường dây dài:
   - Các hiện tượng và thông số cơ bản của đường dây
   - Các phương trình cơ bản của đường dây (tập trung xét cho tín hiệu xoay chiều điều hòa)
2. Đường dây dài ở chế độ truyền công suất (xác lập)
   - Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài
   - Ma trận **A** tương đương của đường dây dài
   - Giải mạch đường dây dài ở chế độ truyền công suất

Nội dung môn học

Phần IV: Đường dây dài (xác lập, quá độ)

3. Đường dây dài ở chế độ truyền sóng (quá độ)
   - Đường dây dài không tiêu tán
   - Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây
   - Giải quá trình quá độ cho đường dây đơn
   - Quá trình truyền sóng trên mạch có nhiều đường dây

Phần II: Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

Chương 10. Các hiện tượng cơ bản trong quá trình quá độ

Chương 11. Phương pháp tích phân kinh điển

Chương 12. Phương pháp toán tử Laplace

Chương 10. Các hiện tượng cơ bản trong quá trình quá độ

10.1. Quá trình quá độ trong mạch tuyến tính

10.2. Một số hàm đặc biệt trong quá trình quá độ

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

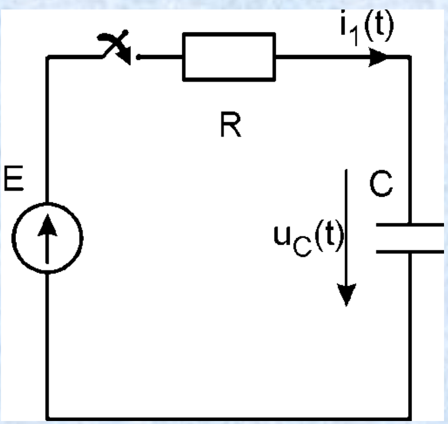
10.5. Biến trạng thái và hệ phương trình biến trạng thái

10.1. Các hiện tượng cơ bản

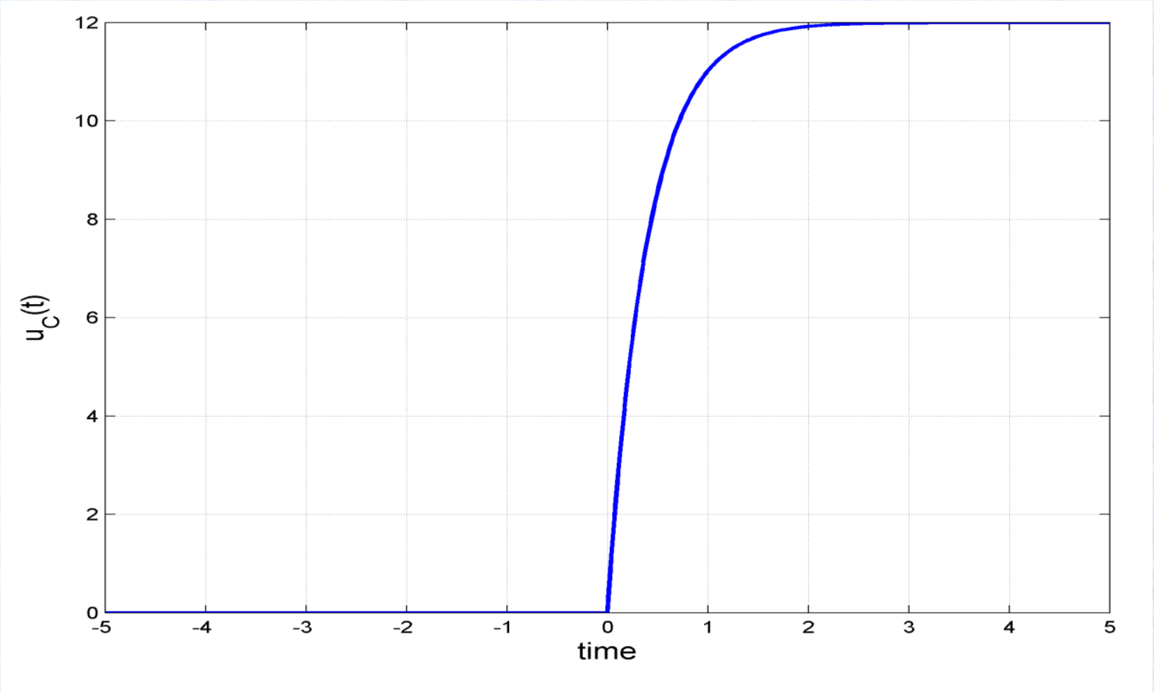
Định nghĩa về QTQĐ: *Quá trình chuyển giao giữa hai trạng thái xác lập.*

Tại thời điểm t=0: khóa K đóng vào. Các thông số:

$E = 12V; R = 4\Omega; C = 0,1F.$



$$u(t) = \begin{cases} E & khi \quad t \to \infty \\ 0 & khi \quad t \le 0 \end{cases}$$



10.1. Các hiện tượng cơ bản

Các nguyên nhân của QTQĐQTQĐ xảy ra khi trong mạch điện có:

- Thay đổi về giá trị của phần tử
- Thay đổi về bản chất của phần tử
- Thay đổi về cấu trúc của mạch

→ *Thời điểm quá độ*: là thời điểm xảy ra thay đổi trong mạch điện

Do một số tín hiệu trong mạch điện có "*quán tính*" nên khi xảy ra thay đổi trong mạch, mạch điện cần một thời gian để chuyển đổi sang trạng thái xác lập mới.

10.1. Các hiện tượng cơ bản

Hai dạng tín hiệu "*có quán tính*" trong mạch điện:

- dòng điện qua các cuộn dây
- điện áp trên các tụ điện

→ Tín hiệu trong mạch có thể là các hàm không liên tục tại điểm quá độ (điểm xảy ra thay đổi trong mạch điện)

$$u(t_0^+) \neq u(t_0^-) \qquad\qquad i(t_0^+) \neq i(t_0^-)$$

→ Khi cần xác định giá trị tức thời ngay sau quá độ: *phối hợp các định luật và hệ phương trình K với 2 định luật về bảo toàn điện tích và bảo tòan từ thông.*

Chú ý: **Tính chất "quán tính" của hai dạng tín hiệu được ứng dụng để dùng L và C để bảo vệ các phần tử trong mạch điện trong các quá trình quá độ.**

10.2. Một số hàm đặc biệt trong quá trình quá độ

Để thuận tiện cho việc mô tả các tín hiệu trong quá trình quá độ, ta sử dụng một số hàm "đặc biệt" sau:

– **Hàm bước nhảy Heaviside**

$$\mathbf{1}(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & khi \quad t > 0 \\ 0 & khi \quad t \le 0 \end{cases}$$

– **Hàm xung Dirac**

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & khi \quad t = 0 \\ 0 & khi \quad t \neq 0 \end{cases} \quad \text{vµ} \quad \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

– **Liên hệ giữa hai hàm trên:** $\dfrac{d}{dt}\mathbf{1}(t) = \delta(t)$

Chú ý: *Có sự khác nhau giữa mô tả nguồn bằng khóa và mô tả bằng hàm Heaviside:*

$$e(t) = E_0 \cdot \mathbf{1}(t) \quad \text{hoÆc} \quad e(t) = E_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right) \cdot \mathbf{1}(t)$$

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

<u>Sơ kiện:</u> Giá trị ban đầu của tín hiệu trong quá trình quá độ. Tuy nhiên tùy theo phương pháp mà ta cần giá trị ban đầu *<u>ngay trước thời điểm quá độ</u>* hoặc giá trị *<u>ngay sau thời điểm quá độ</u>*.

Ví dụ:

- Phương pháp tích phân kinh điển cần sử dụng giá trị *<u>ngay sau thời điểm quá độ</u>* (t_0+).
- Phương pháp ảnh Laplace cần sử dụng giá trị *<u>ngay trước thời điểm quá độ</u>* (t_0-).

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

Nguyên tắc chung:

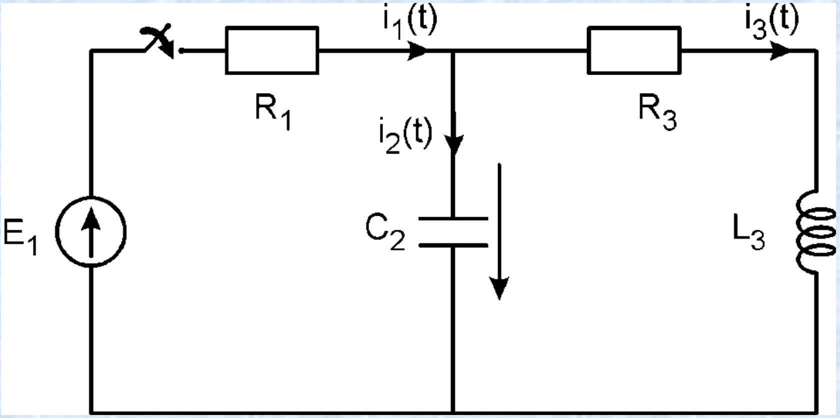
- Các giá trị tín hiệu *ngay trước* thời điểm quá độ được tính từ mạch điện ***trước quá độ*** ở chế độ ***xác lập***.
- Các giá trị tín hiệu *ngay sau* thời điểm quá độ được tính dựa trên các tín hiệu *ngay trước* thời điểm quá độ + hai định luật bảo toàn (từ thông, điện tích) + các định luật Kirchhoff và "Ohm".
- Đa số các trường hợp sử dụng tín hiệu dòng qua cuộn dây và điện áp trên các tụ điện làm biến trạng thái và sơ kiện của các tín hiệu này cần được tính → ta sẽ ưu tiên xét các biến trạng thái này trước.

Chú ý: **Có nhiều trường hợp tín hiệu f(t) là hàm không liên tục tại** ***$t=t_0$ là thời điểm quá độ*** **($f(t_0-) \neq f(t_0+)$).**

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

Ví dụ một số trường hợp tính sơ kiện trước thời điểm quá độ:

a. Trường hợp “0”

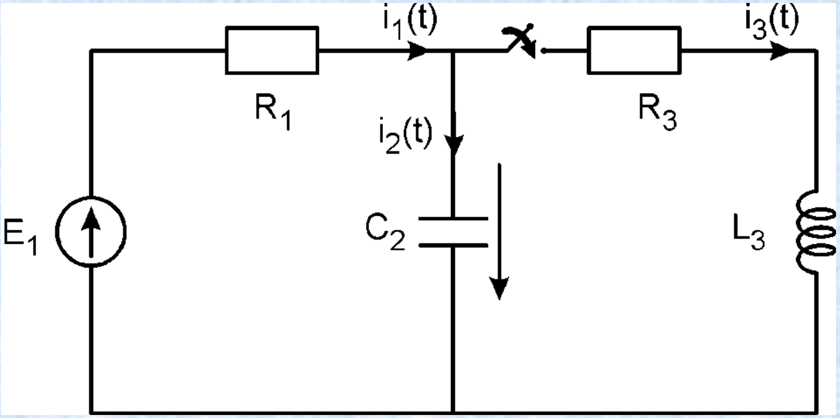


Trước quá độ nguồn E_1 không đấu nối với các phần tử còn lại trong mạch nên ta có các tín hiệu trong mạch bằng 0.

$$u_{C2}(0-) = 0; i_{L3}(0-) = 0.$$

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

b. Trường hợp “DC”



Trước quá độ nguồn E_1 chỉ nối với R_1 và C_2:

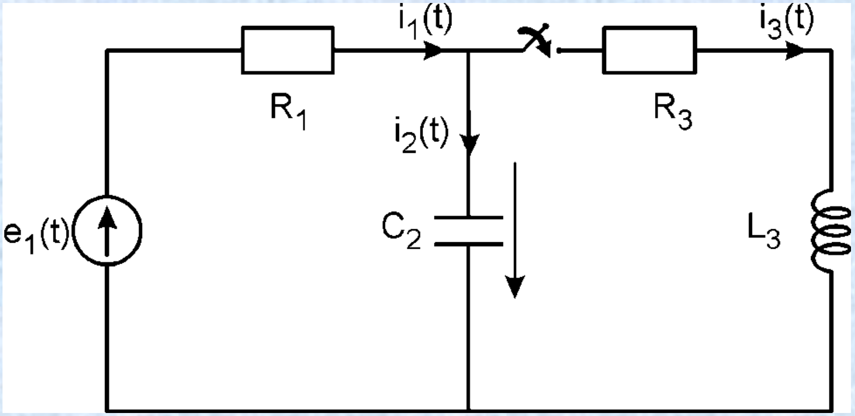
$$u_{C2}(0-) = E_1; i_{L3}(0-) = 0.$$

Các phần tử còn lại trong mạch có sơ kiện bằng 0:

$$i_{R1}(0-) = 0; u_{R1}(0-) = 0; i_{R3}(0-) = 0; u_{R3}(0-) = 0; u_{L3}(0-) = 0, ...$$

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

c. Trường hợp "AC"



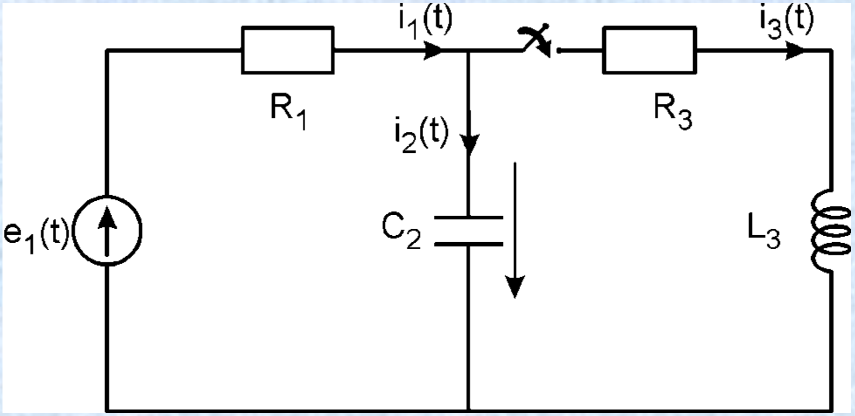
Trước quá độ nguồn e_1 chỉ nối với R_1 và C_2: $i_{L3}(0-) = 0$.

Để tính được sơ kiện trên tụ C_2 ta cần giải mạch trước quá độ ở chế độ xác lập. Nếu nguồn $e_1(t)$ là nguồn biến thiên thì các tín hiệu trước quá độ cũng sẽ là tín hiệu biến thiên và ta cần xác định xem tại thời điểm quá độ thì *giá trị tức thời* của tín hiệu bằng bao nhiêu.

Nếu nguồn $e_1(t)$ là nguồn điều hòa thì ta có thể dùng ảnh phức để hỗ trợ tính toán và giải mạch.

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

c. Trường hợp "AC"



Ví dụ với mạch trên:

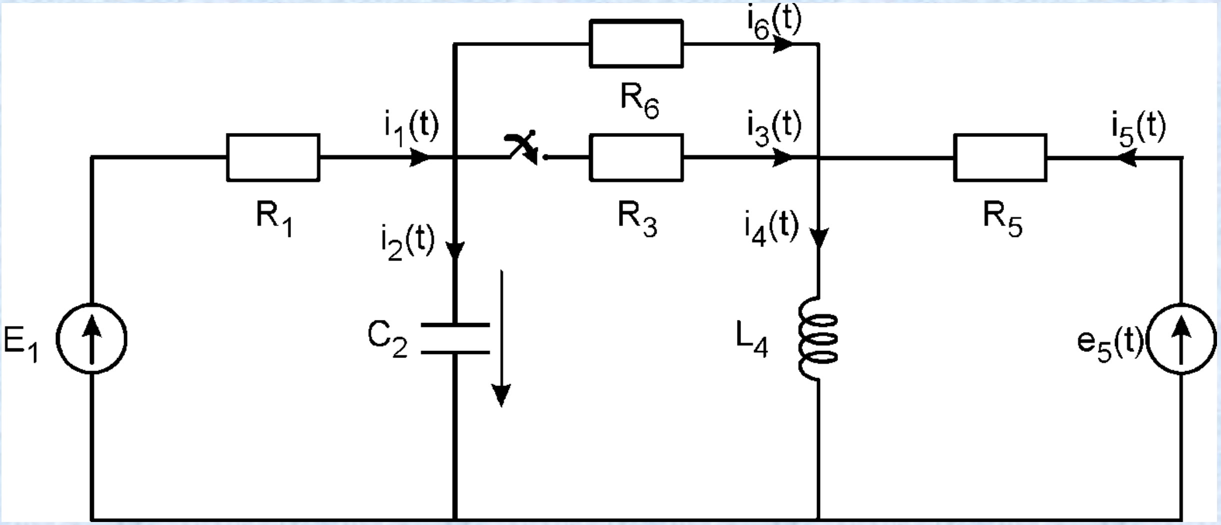
$$e_1(t) \rightarrow \dot{E}_1, C_2 \rightarrow Z_{C2} \Rightarrow \dot{U}_{C2} = \frac{Z_{C2}}{R_1 + Z_{C2}}\dot{E}_1 = \ldots \rightarrow u_{C2}(t) = \ldots \rightarrow u_{C2}(t_0^-) = \ldots$$

Các phần tử còn lại trong mạch có sơ kiện bằng:

$$i_{R1}(0-) = \ldots; u_{R1}(0-) = \ldots; i_{R3}(0-) = \ldots; u_{R3}(0-) = \ldots; u_{L3}(0-) = \ldots, \ldots$$

10.3. Sơ kiện trước quá trình quá độ

d. Trường hợp "AC+DC"



Trước quá độ, nguồn E_1 (DC) và nguồn $e_5(t)$ (AC) tạo tín hiệu trên các phần tử R_1, C_2, L_4, R_5 và R_6. Các tín hiệu này sẽ có cả thành phần một chiều và thành phần điều hòa do tính chất xếp chồng.

Để tính được sơ kiện trên tụ C_2 và cuộn dây L_4 ta cần giải mạch trước quá độ ở chế độ xác lập với từng thành phần tần số và cộng xếp chồng kết quả để có được các tín hiệu *theo hàm thời gian*. Từ đó xác định được các sơ kiện.

10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

- Dùng để hỗ trợ xác định giá trị tức thời của các dòng điện qua các cuộn dây và các điện áp trên các tụ điện *ngay sau* thời điểm quá độ.
- Ứng dụng cho các trường hợp đặc biệt có thể chứng minh được tính chất biến thiên liên tục của *đa số* trường hợp dòng điện qua cuộn dây và điện áp trên tụ điện.
- Hai định luật này có *độ ưu tiên thấp hơn* so với các định luật Kirchhoff và các phương trình đặc trưng của các phần tử.

10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

- Phát biểu của định luật bảo toàn từ thông: với mọi vòng kín *bất kỳ*, tổng từ thông móc vòng qua các cuộn dây trong vòng kín đó biến thiên liên tục qua thời điểm quá độ.

$$\sum_k \Psi_k\left(t_0^-\right) = \sum_k \Psi_k\left(t_0^+\right) \rightarrow \sum_k L_k \cdot i_k\left(t_0^-\right) = \sum_k L_k \cdot i_k\left(t_0^+\right)$$

(Do các cuộn dây tuyến tính có: $\Psi(t) = L \cdot i(t)$)

Ví dụ: Xét vòng E_1-R_1-L_3-L_4

Ngay trước quá độ:

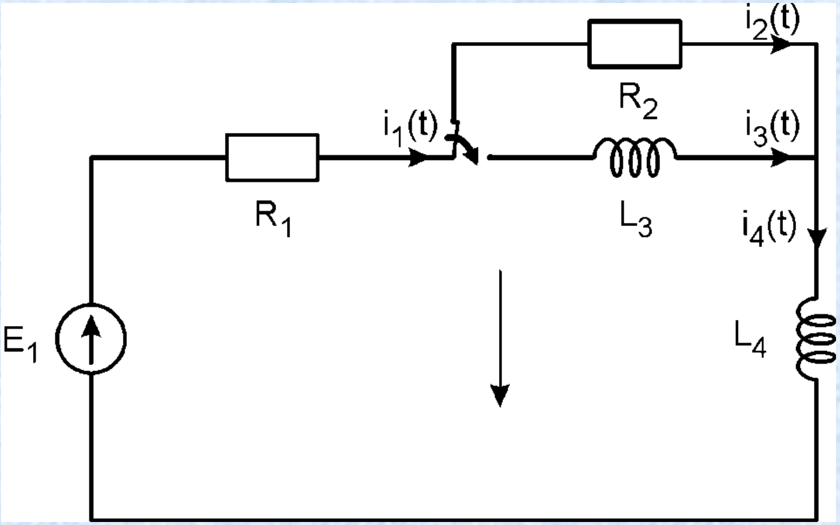
$$\Psi_3(0-) + \Psi_4(0-) = 0 + L_4 \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

Ngay sau quá độ:

$$\Psi_3(0+) + \Psi_4(0+) = \left(L_3 + L_4\right) i_3(0+)$$

Từ đó suy ra:

$$i_3(0+) = i_4(0+) = \frac{L_4}{L_3 + L_4} \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$



10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

<u>*Chú ý:*</u> Nếu ta chọn được 1 vòng (trong mạch sau thời điểm quá độ) chỉ chứa 1 cuộn dây L_k thì dễ dàng chứng minh được dòng điện qua cuộn đó biến thiên liên tục qua thời điểm quá độ.

$$L_k \cdot i_k\left(t_0^-\right) = L_k \cdot i_k\left(t_0^+\right) \rightarrow i_k\left(t_0^-\right) = i_k\left(t_0^+\right)$$

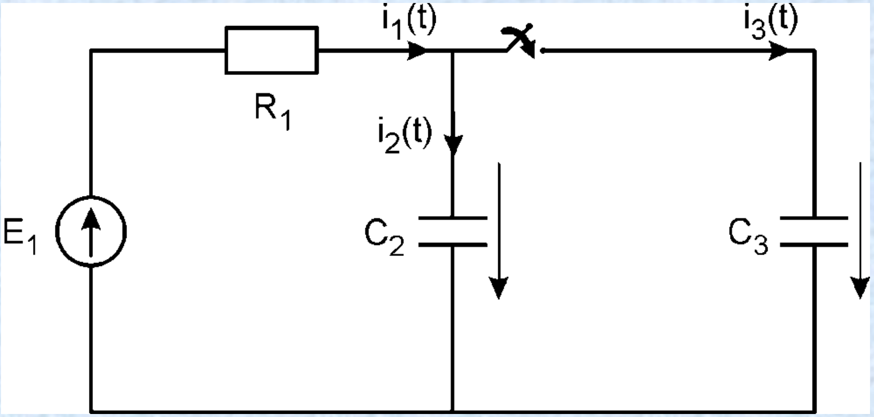
10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

- Phát biểu của định luật bảo toàn điện tích: với mọi nút *bất kỳ*, tổng điện tích tích trên các bản cực tụ điện nối với nút đó biến thiên liên tục qua thời điểm quá độ.

$$\sum_k q_k\left(t_0^-\right) = \sum_k q_k\left(t_0^+\right) \rightarrow \sum_k C_k \cdot u_k\left(t_0^-\right) = \sum_k C_k \cdot u_k\left(t_0^+\right)$$

(Do các tụ điện tuyến tính có: $q(t) = C \cdot u(t)$)

Ví dụ: Xét nút chung 2 tụ C_2 và C_3:



Ngay trước quá độ:

$$q_2(0-) + q_3(0-) = C_2 \cdot E_1 + 0$$

Ngay sau quá độ:

$$q_2(0+) + q_3(0+) = \left(C_2 + C_3\right) u_{C2-3}(0+)$$

Từ đó suy ra:

$$u_{C2}(0+) = u_{C3}(0+) = \frac{C_2}{C_2 + C_3} E_1$$

10.4. Định luật bảo toàn từ thông và bảo toàn điện tích

Chú ý: Nếu ta chọn được 1 nút bất kỳ (trong mạch sau thời điểm quá độ) chỉ nối với 1 tụ điện C_k thì dễ dàng chứng minh được điện áp trên tụ điện đó biến thiên liên tục qua thời điểm quá độ.

$$C_k \cdot u_k\left(t_0^-\right) = C_k \cdot u_k\left(t_0^+\right) \rightarrow u_k\left(t_0^-\right) = u_k\left(t_0^+\right)$$

10.5. Biến trạng thái và hệ phương trình biến trạng thái

Định nghĩa chung của biến trạng thái:

…

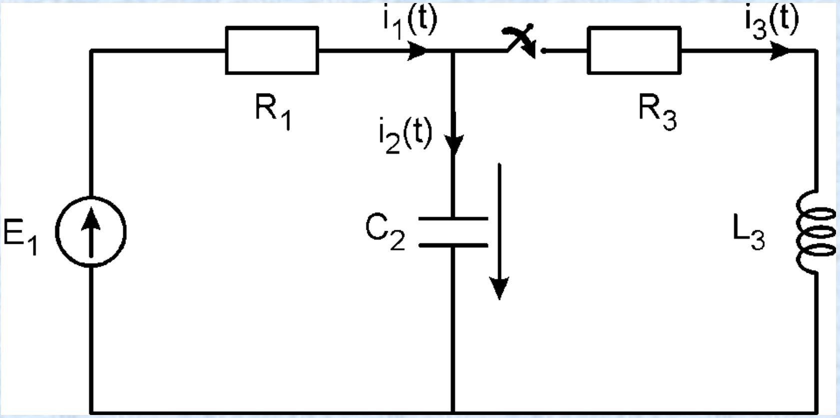
- Trong bài toán quá độ ta *thường* chọn biến trạng thái là các dòng *độc lập* qua các cuộn dây và các điện áp *độc lập* trên các tụ điện.
- Hệ phương trình biến trạng thái: có thể biến đổi suy ra từ hệ phương trình Kirchhoff + các phương trình đặc trưng của các phần tử.

10.5. Biến trạng thái và hệ phương trình biến trạng thái

<u>*Ví dụ:*</u> Mạch hình bên có hai biến trạng thái là: $u_{C2}(t); i_{L3}(t)$

(còn được gọi là mạch bậc 2)

→ cần xây dựng hai phương trình cho hai biến này!



- Hệ phương trình Kirchhoff

$$\begin{cases} i_1(t) & = & i_2(t)+i_3(t) & (1) \\ u_{R1}(t)+u_{C2}(t)-E_1 & = & 0 & (2) \\ u_{R3}(t)+u_{L3}(t)-u_{C2}(t) & = & 0 & (3) \end{cases}$$

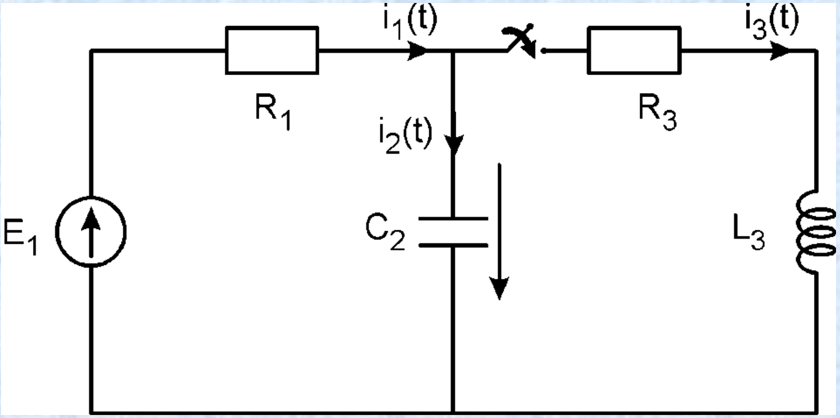
- Hệ phương trình cho hai biến đặc trưng $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$

$$(2) \rightarrow u_{C2}(t)-E_1+R_1\cdot i_1(t)=0 \xrightarrow{(1)} u_{C2}(t)-E_1+R_1\cdot\left(i_2(t)+i_3(t)\right)=0$$

$$\rightarrow u_{C2}(t)+R_1\cdot C_2\frac{du_{C2}}{dt}+R_1\cdot i_3(t)=E_1 \qquad (4)$$

10.5. Biến trạng thái và hệ phương trình biến trạng thái

- Hệ phương trình cho hai biến đặc trưng $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$



$$(3) \rightarrow R_3 \cdot i_3(t) + L_3 \cdot \frac{di_3}{dt} - u_{C2}(t) = 0 \quad (5)$$

$\rightarrow$ Hai phương trình (4) và (5) lập thành hệ hai phương trình cho hai biến đặc trưng $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$

$$\begin{cases} u_{C2}(t) + R_1 \cdot C_2 \dfrac{du_{C2}}{dt} + R_1 \cdot i_3(t) & = & E_1 \\ -u_{C2}(t) + R_3 \cdot i_3(t) + L_3 \cdot \dfrac{di_3}{dt} & = & 0 \end{cases}$$

<u>*Bài tập:*</u> Biểu diễn các tín hiệu trong mạch điện trên qua hai biến đặc trưng $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$

Chương 11. Phương pháp tích phân kinh điển

11.1. Nội dung phương pháp

11.2. Sơ kiện

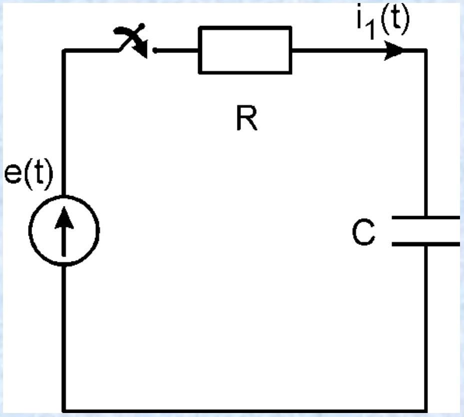
11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

11.1. Nội dung phương pháp

- Sử dụng cho các trường hợp tính được trạng thái xác lập <u>*sau quá độ*</u>
- Tín hiệu quá độ được coi là tổng (xếp chồng) của hai thành phần: thành phần xác lập (sau quá độ) + thành phần tự do

$$u(t) = u_{xl}(t) + u_{td}(t); \quad i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

Xét mạch ví dụ có: $R = 5\Omega; C = 0,1F$.



Khi đóng nguồn 1 chiều 12V ta có:

$$E = 12V \rightarrow u_C(t) = 12 - 12e^{-2t}$$

Tại trạng thái xác lập mới: $u_{Cxl} = E = 12$

$$\rightarrow u_{Ctd}(t) = u_C(t) - u_{Cxl}(t) = -12 \cdot e^{-2t}$$

Khi đóng nguồn xoay chiều 12sin(5t)V ta có:

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t) = 12\sin(5t) \;\; V \rightarrow u_C(t) = 4,138 \cdot e^{-2t} + 4,456 \cdot \sin(5t - 68,20^\circ)$$

Tại trạng thái xác lập mới: $u_{Cxl}(t) = 4,456 \cdot \sin(5t - 68,20^\circ)$

$$\rightarrow u_{Ctd}(t) = u_C(t) - u_{Cxl}(t) = 4,138 \cdot e^{-2t}$$

11.1. Nội dung phương pháp

- Để tính thành phần xác lập (do các nguồn còn lại trong mạch tác động sau quá độ): sử dụng các phương pháp đã biết, tính quá trình xác lập cho mạch *sau quá độ*
- Để tính thành phần tự do (do các phần năng lượng chênh lệch trong các tụ điện và cuộn dây tạo ra): Từ mạch sau thời điểm quá độ với các nguồn bằng 0, chỉ còn các sơ kiện trên tụ điện hoặc cuộn dây có thể khác 0.

11.1. Nội dung phương pháp

1. Chọn tập hợp biến trạng thái: ví dụ như:
   - Các dòng nhánh,
   - Các điện thế nút ẩn,
   - Các dòng vòng ẩn,
   - ***Các dòng qua các cuộn dây độc lập và các điện áp trên các tụ điện độc lập,***
   - …
2. Lập hệ phương trình vi – tích phân cho tập hợp biến trạng thái
3. Xác định các sơ kiện (*ngay sau* thời điểm quá độ)
4. Giải hệ phương trình vi – tích phân theo các bước:
   1. Đại số hóa hệ phương trình vi – tích phân
   2. Lập phương trình đặc trưng
   3. Tìm các nghiệm đặc trưng
   4. Tìm các hệ số đặc trưng

11.2. Sơ kiện

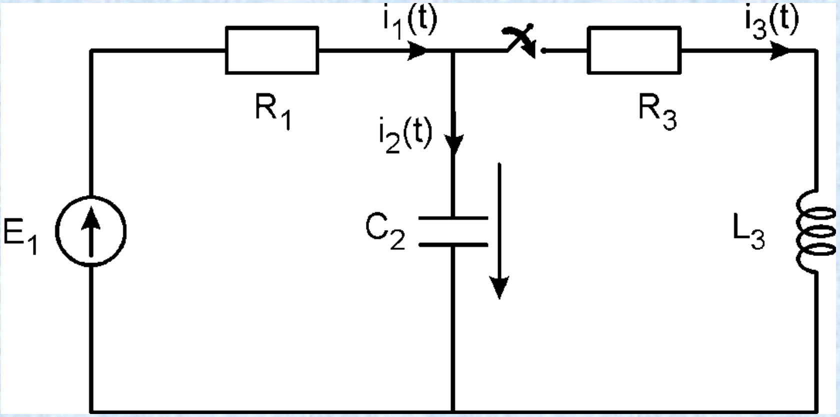
- Hệ phương trình vi – tích phân cho các tín hiệu cần tìm u(t) và i(t)
- Cần các điều kiện biên để có được nghiệm duy nhất
- Điều kiện biên thường được cho ở thời điểm bắt đầu quá độ ($t=t_0$) hoặc ở thời điểm xác lập mới ($t=\infty$)
- Tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể, ta có thể cần các sơ kiện là các giá trị tức thời tại biên ($u(t_0)$, $i(t_0)$) hoặc giá trị của các đạo hàm tại biên ($u'(t_0)$, $u''(t_0)$,… để tìm u(t) và $i'(t_0)$, $i''(t_0)$,… để tìm i(t))
- Các giá trị sơ kiện trên có thể được xác định từ hệ phương trình Kirchhoff của mạch điện và các hệ phương trình hệ quả thu được từ việc lấy đạo hàm cả hai vế của hệ phương trình Kirchhoff.

Chú ý: 1. Nên sử dụng định luật bảo toàn từ thông và điện tích để xác định các sơ kiện cho các i_L và các u_C trước.

2. Tính liên tục của hàm số và đạo hàm (các cấp) của một hàm số tại một điểm!

11.2. Sơ kiện

<u>Ví dụ:</u> Cho mạch điện như hình bên, Tính các giá trị tín hiệu trong mạch và đạo hàm bậc 1 và 2 của các tín hiệu tại thời điểm 0+ (ngay sau quá độ).



Một số tín hiệu trong mạch:

$$i_{R1}(0+), u_{R1}(0+), i_{C2}(0+), u_{C2}(0+), i_{R3}(0+), u_{R3}(0+), u_{L3}(0+)$$

Đạo hàm các cấp của các tín hiệu đó:

$$i'_{R1}(0+), u'_{R1}(0+), i'_{C2}(0+), u'_{C2}(0+), i'_{R3}(0+), u'_{R3}(0+), u'_{L3}(0+)$$

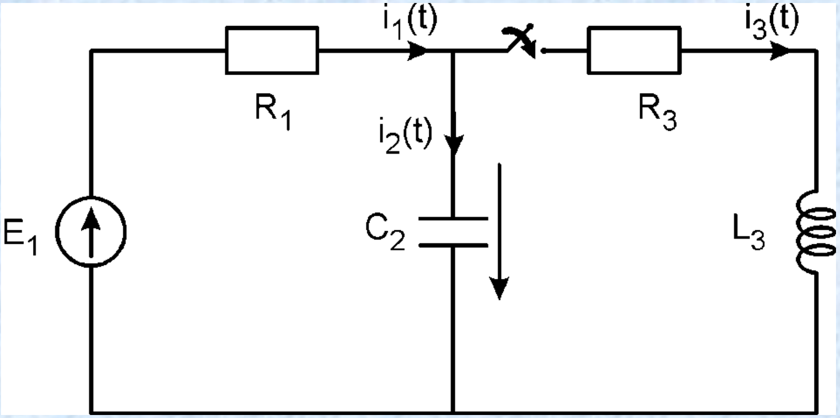
$$i''_{R1}(0+), u''_{R1}(0+), i''_{C2}(0+), u''_{C2}(0+), i''_{R3}(0+), u''_{R3}(0+), u''_{L3}(0+)$$

Hệ phương trình Kirchhoff của mạch điện (sau thời điểm quá độ):

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) & (1) \\ u_{R1}(t) + u_{C2}(t) - E_1 = 0 & (2) \\ u_{R3}(t) + u_{L3}(t) - u_{C2}(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

11.2. Sơ kiện

Các sơ kiện giá trị tức thời của tín hiệu:



Các tín hiệu biến thiên liên tục:

$$u_{C2}(0-) = E \to u_{C2}(0+) = E$$

$$i_{L3}(0-) = 0 \to i_{L3}(0+) = 0$$

Các tín hiệu còn lại:

$$u_{C2}(0+) = E \to u_{R1}(0+) = E - u_{C2}(0+) = 0 \to i_{R1}(0+) = 0$$

$$i_{L3}(0+) = 0 \to i_{R3}(0+) = 0 \to u_{R3}(0+) = 0 \to u_{L3}(0+) = E; i_{C2}(0+) = 0$$

Các sơ kiện đạo hàm bậc nhất của tín hiệu (có thể tính từ hệ phương trình Kirchhoff hoặc từ các phương trình đặc trưng của các phần tử:

$$i_{C2}(0+) = 0 \to u'_{C2}(0+) = 0; u_{L3}(0+) = E \to i'_{L3}(0+) = \frac{E}{L_3}$$

$$(2) \to R_1 i'_1(t) + u'_{C2}(t) = 0 \to i'_1(0+) = 0 \to u'_{R1}(0+) = 0$$

$$i'_{L3}(0+) = \frac{E}{L_3} \to u'_{R3}(0+) = \frac{E \cdot R_3}{L_3}; \ldots$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

Các bước chi tiết gồm:

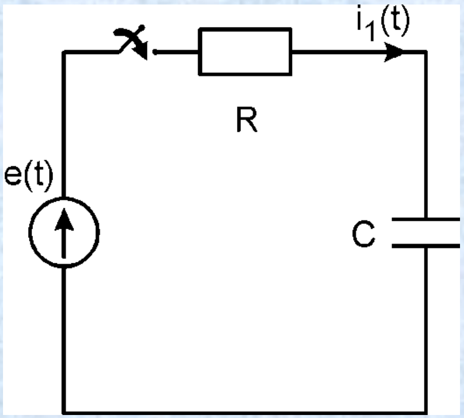
1. Tính thành phần xác lập sau quá độ
2. Lập hệ phương trình biến trạng thái cho mạch sau quá độ (có thể dựa trên các phương trình Kirchhoff), cho các nguồn bằng 0 để có được hệ phương trình cho thành phần tự do.
3. Đại số hóa hệ phương trình cho thành phần tự do của các biến đặc trưng

$$\left(\frac{du(t)}{dt} \to p \cdot u(t); \int u(t) \cdot dt \to \frac{1}{p} \cdot u(t)\right)$$

4. Xác định đa thức đặc trưng (khai triển định thức của hệ phương trình đã đại số hóa) và các nghiệm của đa thức đặc trưng.
5. Xây dựng dạng nghiệm của hệ và sử dụng các sơ kiện để xác định các hệ số của nghiệm.

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

Ví dụ minh họa:



Xét mạch ví dụ có: $R = 5\Omega; C = 0,1F$.

Tại t=0 ta đóng nguồn 1 chiều $E = 12V$.

1. Tính thành phần xác lập sau quá độ: $u_{Cxl} = E = 12$

2. Lập hệ phương trình biến trạng thái $u_{Ctd}(t)$

$$u_R(t) + u_C(t) - E = 0 \rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) - E = 0$$

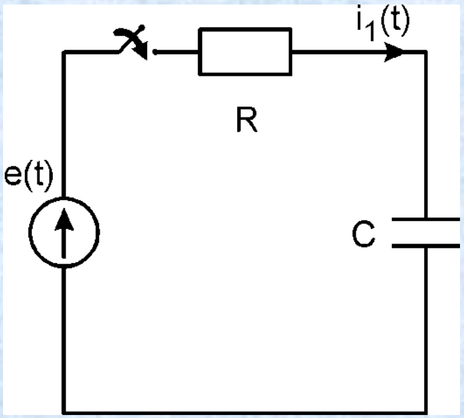
$$\rightarrow RC\frac{du_{Ctd}}{dt} + u_{Ctd}(t) - 0 = 0$$

3. Đại số hóa hệ phương trình biến trạng thái:

$$RC \cdot p \cdot u_{Ctd}(t) + u_{Ctd}(t) = 0 \rightarrow (p \cdot RC + 1)u_{Ctd}(t) = 0$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

4. Xác định đa thức đặc trưng và các nghiệm của đa thức đặc trưng.



$$(p\cdot RC+1)u_{Ctd}(t)=0\rightarrow p\cdot RC+1=0\rightarrow p=-\frac{1}{RC}$$

5. Xây dựng dạng nghiệm của hệ và sử dụng các sơ kiện để xác định các hệ số của nghiệm.

$$p=-\frac{1}{RC}\rightarrow u_{Ctd}(t)=A\cdot e^{pt}=A\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(t)=u_{Cxl}(t)+u_{Ctd}(t)\rightarrow u_{Ctd}(0+)=u_C(0+)-u_{Cxl}(0+)=-12$$

$$u_{Ctd}(0+)=-12\rightarrow A=-12\rightarrow u_{Ctd}(t)=-12\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

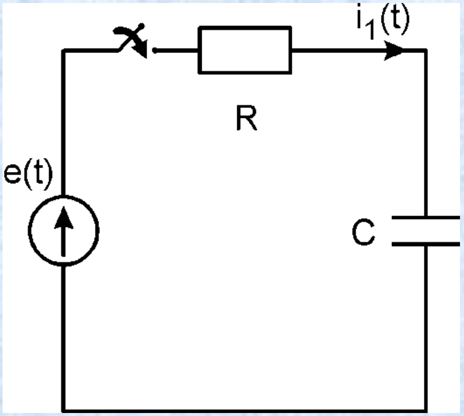
Tổng hợp nghiệm:

$$u_C(t)=u_{Cxl}(t)+u_{Ctd}(t)=12-12\cdot e^{-\frac{t}{RC}}=12-12\cdot e^{-2t}$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

Tính lại nếu tại t=0 ta đóng nguồn xoay chiều

$$e(t) = E_0 \sin\left(\omega t\right) = 12\sin(5t) \quad V$$



1. Tính thành phần xác lập sau quá độ: Sử dụng phương pháp ảnh phức ta có

$$u_{Cxl}(t) = 4,456 \cdot \sin\left(5t - 68,20^\circ\right)$$

Các bước 2-3-4 tương tự như ví dụ trước

5. Xây dựng dạng nghiệm của hệ và sử dụng các sơ kiện để xác định các hệ số của nghiệm.

$$u_{Ctd}(0+) = u_C(0+) - u_{Cxl}(0+) = 0 - 4,456 \cdot \sin\left(5t - 68,20^\circ\right) = 4,138$$

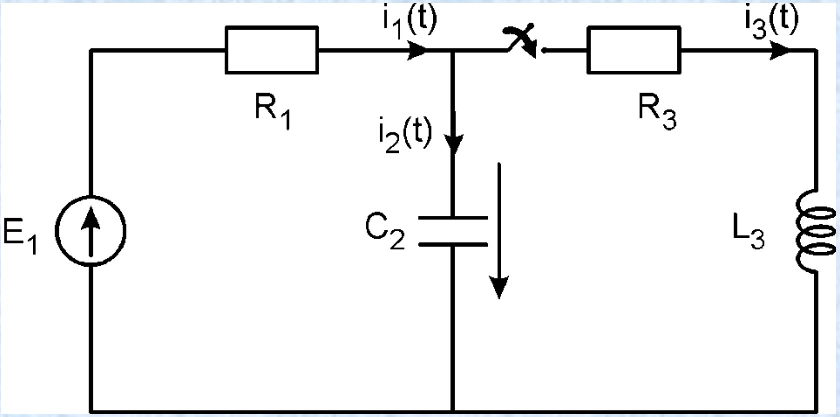
$$u_{Ctd}(t) = A \cdot e^{-2t} \rightarrow u_{Ctd}(0+) = A = 4,138 \rightarrow u_{Ctd}(t) = 4,138 \cdot e^{-2t}$$

Tổng hợp nghiệm:

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) = 4,456 \cdot \sin\left(5t - 68,20^\circ\right) + 4,138 \cdot e^{-2t}$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

Ví dụ minh họa:



Xét mạch có: $E_1 = 18V; R_1 = 2\Omega;$

$C_2 = 0,5F; R_3 = 4\Omega; L_3 = 1H;$

Tại t=0 ta đóng khóa xuống.

1. Tính thành phần xác lập sau quá độ:

$$u_{Cxl} = E_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 12; i_{L3xl} = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 3.$$

2. Lập hệ phương trình biến trạng thái $u_{C2td}(t)$ và $i_{L3td}(t)$

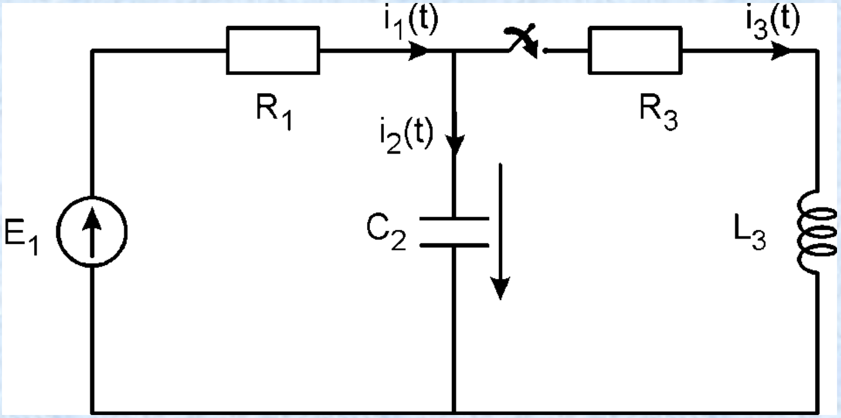
$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) & (1) \\ u_{R1}(t) + u_{C2}(t) - E_1 = 0 & (2) \\ u_{R3}(t) + u_{L3}(t) - u_{C2}(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \to R_1(i_2(t) + i_3(t)) + u_{C2}(t) - E_1 = 0 \to R_1 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + R_1 i_3(t) + u_{C2}(t) - E_1 = 0$$

$$\to R_1 C_2 \frac{du_{C2td}}{dt} + R_1 i_{3td}(t) + u_{C2td}(t) - 0 = 0$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

2. Lập hệ phương trình biến trạng thái $u_{C2td}(t)$ và $i_{L3td}(t)$



$$(3) \rightarrow R_3 i_3(t) + L_3 \frac{di_3}{dt} - u_{C2}(t) = 0$$

$$\rightarrow R_3 i_{3td}(t) + L_3 \frac{di_{3td}}{dt} - u_{C2td}(t) = 0$$

3. Đại số hóa hệ phương trình biến trạng thái:

$$\rightarrow \begin{cases} R_1 C_2 p \cdot u_{C2td}(t) + R_1 i_{3td}(t) + u_{C2td}(t) & = & 0 \\ R_3 i_{3td}(t) + L_3 p \cdot i_{3td}(t) - u_{C2td}(t) & = & 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(pR_1 C_2 + 1\right) \cdot u_{C2td}(t) + R_1 i_{3td}(t) & = & 0 \\ -u_{C2td}(t) + \left(pL_3 + R_3\right) i_{3td}(t) & = & 0 \end{cases}$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

4. Xác định đa thức đặc trưng và các nghiệm của đa thức đặc trưng.

$$\begin{cases} \left(pR_1C_2+1\right)\cdot u_{C2td}(t)+R_1 i_{3td}(t) & = & 0 \\ -u_{C2td}(t)+\left(pL_3+R_3\right) i_{3td}(t) & = & 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} pR_1C_2+1 & R_1 \\ -1 & pL_3+R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{C2td}(t) \\ i_{3td}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det \begin{vmatrix} pR_1C_2+1 & R_1 \\ -1 & pL_3+R_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left(pR_1C_2+1\right)\left(pL_3+R_3\right)+R_1=0$$

$$\rightarrow p^2+5p+6=0$$

$$\rightarrow p_0=-2; p_1=-3.$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

5. Xây dựng dạng nghiệm của hệ và sử dụng các sơ kiện để xác định các hệ số của nghiệm.

$$p_0 = -2; p_1 = -3 \rightarrow u_{C2td}(t) = A_0 \cdot e^{-2t} + A_1 \cdot e^{-3t}; i_{3td}(t) = B_0 \cdot e^{-2t} + B_1 \cdot e^{-3t};$$

Do các tín hiệu có hai thành phần (*mạch bậc* 2) nên ta cần 2 sơ kiện cho mỗi tín hiệu, cụ thể là $u_{C2td}(0+)$ và $u'_{C2td}(0+)$ để tính $u_{C2td}(t)$ và $i_{3td}(0+)$ và $i'_{3td}(0+)$ để tính $i_{3td}(t)$:

$$u_{C2td}(0+) = u_{C2}(0+) - u_{C2xl}(0+) = 18 - 12 = 6$$
$$i_{3td}(0+) = i_3(0+) - i_{3xl}(0+) = 0 - 3 = -3$$

Từ hai phương trình cho các biến trạng thái ta có:

$$\frac{du_{C2td}}{dt} = -\frac{R_1 i_{3td}(t) + u_{C2td}(t)}{R_1 C} \rightarrow u'_{C2td}(0+) = -\frac{2 \cdot (-3) + 6}{2 \cdot 0,5} = 0$$
$$\frac{di_{3td}}{dt} = \frac{u_{C2td}(t) - R_3 i_{3td}(t)}{L_3} \rightarrow i'_{3td}(0+) = \frac{6 - 4 \cdot (-3)}{1} = 18$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

5. Xây dựng dạng nghiệm của hệ và sử dụng các sơ kiện để xác định các hệ số của nghiệm.

$$u_{C2td}(t) = A_0 \cdot e^{-2t} + A_1 \cdot e^{-3t} \rightarrow \begin{cases} u_{C2td}(0+) & = A_0 + A_1 & = 6 \\ u'_{C2td}(0+) & = (-2)A_0 + (-3)A_1 & = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_0 & = & 18 \\ A_1 & = & -12 \end{cases}$$

$$i_{3td}(t) = B_0 \cdot e^{-2t} + B_1 \cdot e^{-3t} \rightarrow \begin{cases} i_{3td}(0+) & = B_0 + B_1 & = -3 \\ i'_{3td}(0+) & = (-2)B_0 + (-3)B_1 & = 18 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} B_0 & = & 9 \\ B_1 & = & -12 \end{cases}$$

Tổng hợp nghiệm:

$$u_{C2}(t) = u_{C2xl}(t) + u_{C2td}(t) = 12 + 18 \cdot e^{-2t} - 12 \cdot e^{-3t}$$

$$i_3(t) = i_{3xl}(t) + i_{3td}(t) = 3 + 9 \cdot e^{-2t} - 12 \cdot e^{-3t}$$

11.3. Các bước giải hệ phương trình vi – tích phân của các biến trạng thái

Nhận xét chung:

- Phương pháp tích phân kinh điển khá phức tạp và dài, chỉ thuận tiện để "nhẩm" các mạch đơn giản cơ bản như mạch bậc nhất R-C, R-L, mạch bậc hai R-L-C nối tiếp, R-L-C song song.
- Trường hợp mạch bậc N ta cần giải đa thức bậc N để tìm N nghiệm, sau đó cần tính N sơ kiện cho mỗi tín hiệu (ví dụ gồm giá trị tức thời và các giá trị đạo hàm bậc 1, 2, …, N-1) sau đó giải hệ N phương trình N ẩn để tìm các hệ số tương ứng cho từng tín hiệu.
- Chỉ phù hợp cho các mạch có trạng thái xác lập sau quá độ có thể tính được dễ dàng (nguồn DC, nguồn AC, nguồn tuần hoàn,…). Không phù hợp cho các dạng nguồn khác như nguồn Ae^{-at},…

Chương 12. Phương pháp toán tử Laplace

12.1. Ảnh Laplace và tính chất

12.2. Ảnh ngược Laplace

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

12.4. Ảnh Laplace của mạch điện

12.5. Hệ phương trình của mạch ảnh Laplace

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

12.1. Ảnh Laplace và tính chất

a. Định nghĩa chung của ảnh Laplace (ký hiệu 0- có ý nghĩa cho trường hợp hàm số không liên tục xung quanh điểm 0)

$$f(t) \Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$$

<u>*Chú ý:*</u> 1. Một số tài liệu khác sử dụng biến *s* thay cho biến *p*

2. Tồn tại các định nghĩa và ứng dụng các toán tử Laplace với các cực lấy tích phân khác (như từ -∞→∞, hoặc -∞→0) nhưng LTM không sử dụng các toán tử đó.

b. Một số ví dụ tính toán đơn giản

$$f(t) = E_0 = const \Rightarrow F(p) = \int_{t=0}^{\infty} E_0 \cdot e^{-pt}\cdot dt = E_0\cdot e^{-pt}\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{E_0}{p}$$

$$f(t) = E_0\cdot e^{-at} \Rightarrow F(p) = \int_{t=0}^{\infty} E_0\cdot e^{-at}\cdot e^{-pt}\cdot dt = E_0\cdot e^{-(p+a)t}\cdot\left(-\frac{1}{p+a}\right)\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{E_0}{p+a}$$

12.1. Ảnh Laplace và tính chất

c. Một số ảnh của các tín hiệu cơ bản

$$f(t) = E_0 \cdot \sin\left(\omega t\right) \Leftrightarrow F(p) = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$f(t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t\right) \Leftrightarrow F(p) = E_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = E_0 \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right) \Leftrightarrow F(p) = E_0 \frac{\omega \cos\varphi + p \sin\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right) \Leftrightarrow F(p) = E_0 \frac{p \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

...

12.1. Ảnh Laplace và tính chất

d. Một số tính chất cơ bản của ảnh Laplace

- Tuyến tính

$$\mathcal{L}\left(f_1(t)\right) = F_1(p); \mathcal{L}\left(f_2(t)\right) = F_2(p) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left(a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)\right) = a_1 \cdot F_1(p) + a_2 \cdot F_2(p)$$

$$\mathcal{L}\left(2 + 3\sin(t) + 4\sin(5t + 60^\circ)\right) = \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2 + 1} + \frac{4\left(5 \cdot \cos 60^\circ + p \cdot \sin 60^\circ\right)}{p^2 + 25}$$

- Ảnh đạo hàm (sử dụng cho …)

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p) \to \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0^-)$$

- Dịch gốc thời gian (sử dụng cho …)

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p) \to \mathcal{L}\left(f(t - T_0)\right) = F(p) \cdot e^{-pT_0}$$

- …

12.2. Ảnh ngược Laplace

a. Định nghĩa ảnh ngược

$$F(p) \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{T\to\infty}\int_{\sigma-jT}^{\sigma+jT} F(p)\cdot e^{pt}\cdot dt$$

Tuy nhiên công thức trên không thực sự thuận tiện cho việc tính toán ảnh ngược. Trong các bài toán lý thuyết mạch, ta thường gặp trường hợp F(p) là tỷ số của hai đa thức theo *p.* Khi đó ta có thể sử dụng phương pháp Heaviside (các trường hợp đơn giản, ta có thể sử dụng các phương pháp phân tích trực tiếp thành các thành phần cơ bản và xếp chồng các ảnh ngược).

12.2. Ảnh ngược Laplace

b. Phương pháp Heaviside

Khi có tín hiệu F(p) được biểu diễn theo tỷ số hai đa thức $F_1(p)/F_2(p)$, ta thực hiện tuần tự theo 3 bước:

1. Tìm nghiệm của đa thức mẫu số (tạm chỉ xét trường hợp đa thức có nghiệm đơn): p=? để $F_2(p)=0$.
2. Tính các hệ số tương ứng với nghiệm:

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i}$$

3. Tổng hợp nghiệm (nếu p_i là các nghiệm đơn)

$$f(t) = \sum_i A_i \cdot e^{p_i t} \quad cho \quad t \geq t_0$$

12.2. Ảnh ngược Laplace

b. Phương pháp Heaviside

Các trường hợp nghiệm:

- Nghiệm đơn:
    - Chỉ gồm các nghiệm thực
    - Có một số nghiệm ảo
- Nghiệm kép (tự tham khảo)

<u>Chú ý:</u> Trường hợp nghiệm phức đơn ta có các cặp nghiệm là các số phức liên hợp. Khi đó các hệ số tương ứng cũng là các số phức liên hợp.

$$1.\, p_i = p_j^* \to A_i = A_j^*$$

$$2.\, p_i = p_j^* \to A_i \cdot e^{p_i t} + A_j \cdot e^{p_j t} = 2\left|A_i\right| e^{\mathrm{Re}(p_i)\cdot t} \cos\left(\mathrm{Im}(p_i)\cdot t + \measuredangle A_i\right)$$

hoÆc nÕu

$$p_i = a + jb;\, A_i = A\measuredangle\varphi;\, p_i = p_j^*$$

$$\to A_i \cdot e^{p_i t} + A_j \cdot e^{p_j t} = 2\cdot A\cdot e^{at}\cos\left(bt+\varphi\right) = 2\cdot A\cdot e^{at}\sin\left(bt+\varphi+90^\circ\right)$$

12.2. Ảnh ngược Laplace

Ví dụ minh họa nghiệm thực:

$$U(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{12(p+1)(p+4)}{p(p+2)(p+3)}$$

1. Nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0 = 0; p_1 = -2; p_2 = -3.$

2. Các hệ số tương ứng:

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{12(p+1)(p+4)}{3p^2+10p+6}\right|_{p=p_i} \rightarrow A_0 = 8; A_1 = 12; A_2 = -8$$

3. Tổng hợp nghiệm

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} A_i \cdot e^{p_i \cdot t} = 8 + 12e^{-2t} - 8e^{-3t} \text{ (cho } t \geq 0)$$

<u>*Chú ý:*</u> Trường hợp mạch ổn định và đa thức mẫu số có các nghiệm thực thì ta không có nghiệm dương!

12.2. Ảnh ngược Laplace

Ví dụ minh họa nghiệm phức:

$$U(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{12(p+1)(p+4)}{p(p^2+4p+5)}$$

1. Nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0 = 0; p_1 = -2 + j; p_2 = -2 - j.$

2. Các hệ số tương ứng:

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{12(p+1)(p+4)}{3p^2+8p+5}\right|_{p=p_i} \rightarrow A_0 = 9,6;$$

$$\rightarrow A_1 = 1,2 - j8,4 = 8,485\measuredangle -81,87^\circ; A_2 = A_1^* = 1,2 + j8,4 = 8,485\measuredangle 81,87^\circ$$

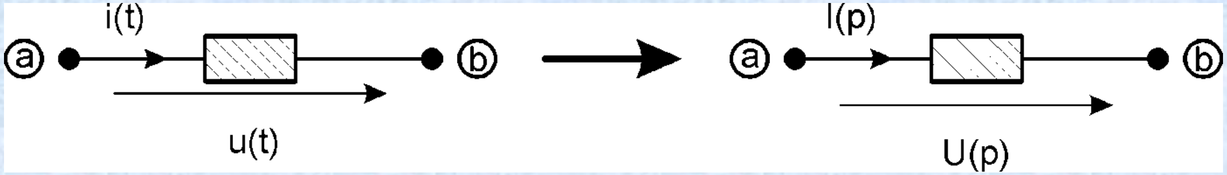
3. Tổng hợp nghiệm (cho t≥0)

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} A_i \cdot e^{p_i \cdot t} = 9,6 + 2 \cdot 8,485 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t - 81,87^\circ) = 9,6 + 16,97 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t + 8,13^\circ)$$

Chú ý: Trường hợp mạch ổn định và đa thức mẫu số có các nghiệm phức thì thành phần thực của các nghiệm không được là số dương!

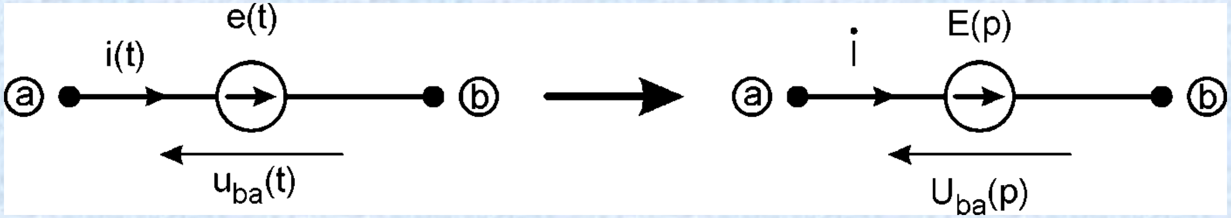
12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

Ý tưởng chung:



Các phần tử cơ bản của mạch điện:

a. Nguồn áp:

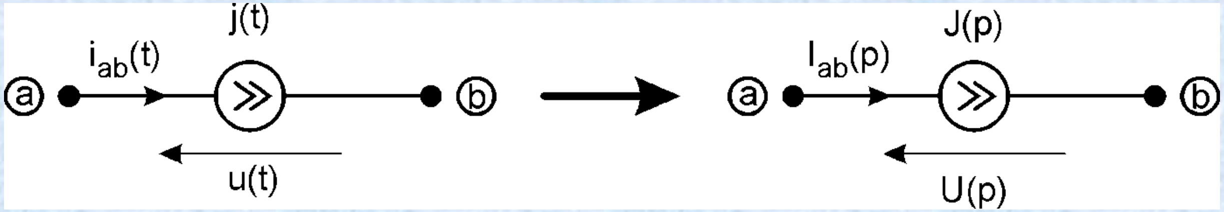


$$u_{ba}(t) = e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U_{ba}(p) = E(p)$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

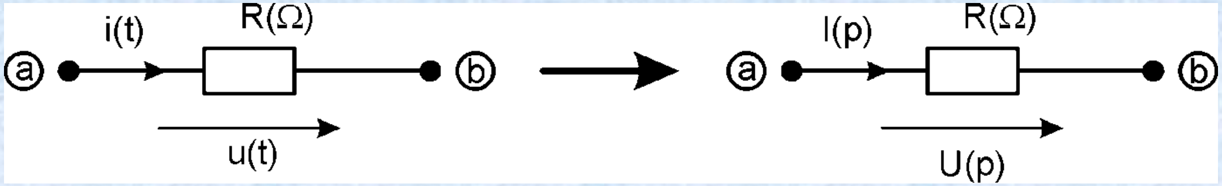
Các phần tử cơ bản của mạch điện:

b. Nguồn dòng:



$$i_{ab}(t) = j(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I_{ab}(p) = J(p)$$

c. Điện trở:

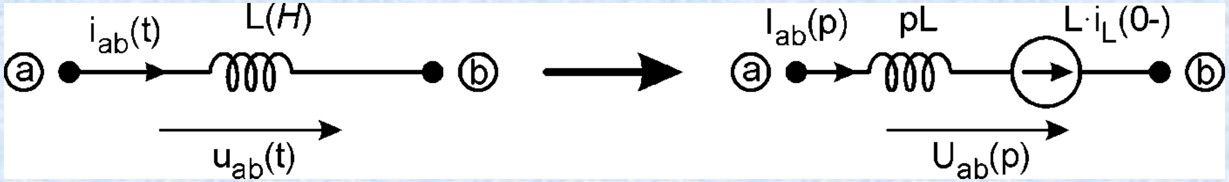


$$u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p) = \mathcal{L}\big(u(t)\big) = \mathcal{L}\big(R \cdot i(t)\big) = R \cdot \mathcal{L}\big(i(t)\big) = R \cdot I(p)$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

Các phần tử cơ bản của mạch điện:

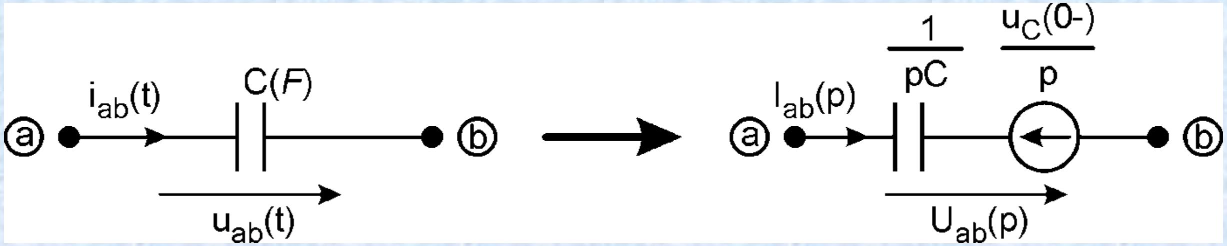
d. Cuộn dây:



$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p) = \mathcal{L}\left(L \cdot \frac{di}{dt}\right) = L \cdot \mathcal{L}\left(\frac{di}{dt}\right) = L \cdot \left(p\mathcal{L}\left(i(t)\right) - i(0-)\right)$$

$$= pL \cdot I(p) - L \cdot i(0-)$$

e. Tụ điện:



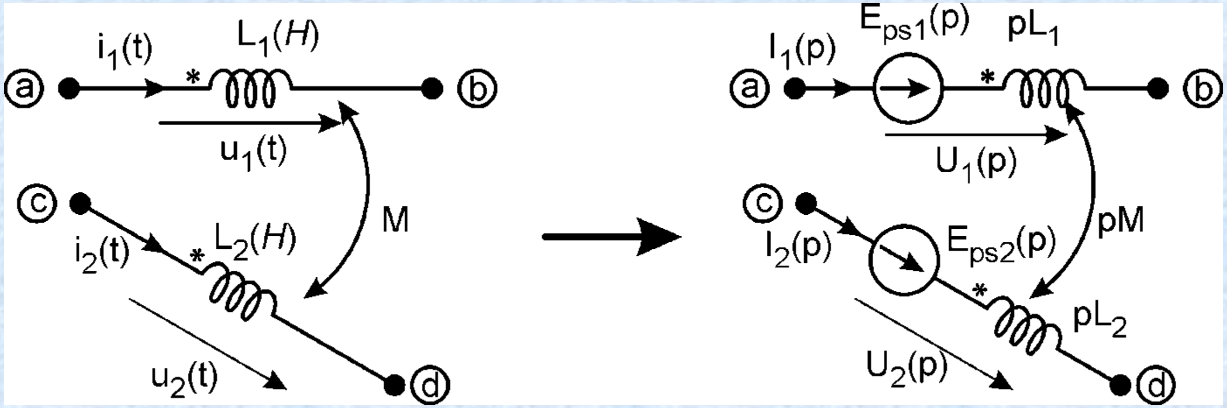
$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} I(p) = \mathcal{L}\left(C \cdot \frac{du}{dt}\right) = C \cdot \mathcal{L}\left(\frac{du}{dt}\right) = C \cdot \left(p\mathcal{L}\left(u(t)\right) - u(0-)\right)$$

$$\rightarrow U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u(0-)}{p}$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

Các phần tử cơ bản của mạch điện:

f. Các cuộn dây có hỗ cảm:



$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \cdot \dfrac{di_1}{dt} + M \cdot \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \cdot \dfrac{di_2}{dt} + M \cdot \dfrac{di_1}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1(p) = \left(pL_1 \cdot I_1(p) - L_1 i_1(0-)\right) + \left(pM \cdot I_2(p) - Mi_2(0-)\right) \\ U_2(p) = \left(pL_2 \cdot I_2(p) - L_2 i_2(0-)\right) + \left(pM \cdot I_1(p) - Mi_1(0-)\right) \end{cases}$$

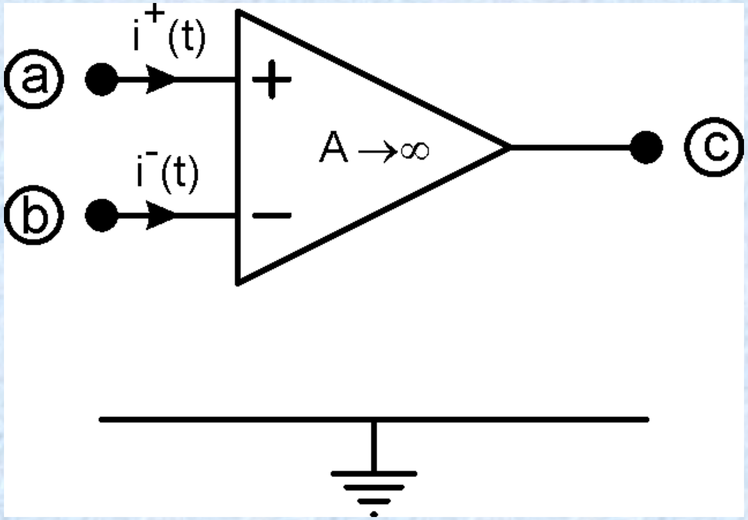
$$\rightarrow \begin{cases} U_1(p) = \left(pL_1 \cdot I_1(p) + pM \cdot I_2(p)\right) - \left(L_1 i_1(0-) + Mi_2(0-)\right) \\ U_2(p) = \left(pL_2 \cdot I_2(p) + pM \cdot I_1(p)\right) - \left(L_2 i_2(0-) + Mi_1(0-)\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} U_1(p) = \left(pL_1 \cdot I_1(p) + pM \cdot I_2(p)\right) - E_{ps1}(p) \\ U_2(p) = \left(pL_2 \cdot I_2(p) + pM \cdot I_1(p)\right) - E_{ps2}(p) \end{cases}$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

- Khuếch đại thuật toán

Với các tín hiệu (*u(t)*,*i(t)*) đều là hình sin như: $\varphi_a(t), \varphi_b(t), \varphi_c(t)$



Trường hợp *gần lý tưởng (A<∞)*:

$$\begin{cases} i^+(t) \simeq 0; i^-(t) \simeq 0 \\ \varphi_c(t) = A\big(\varphi_a(t) - \varphi_b(t)\big) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I^+(p) \simeq 0; I^-(p) \simeq 0 \\ \varphi_c(p) = A\big(\varphi_a(p) - \varphi_b(p)\big) \end{cases}$$

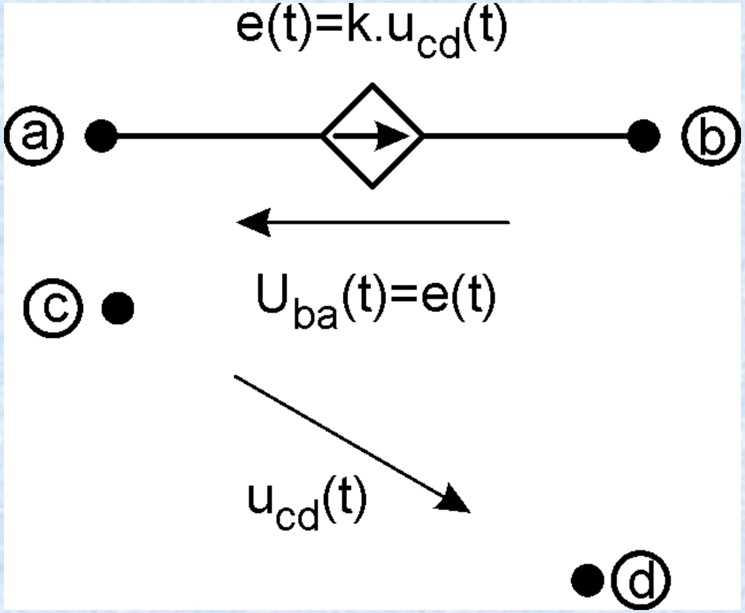
Trường hợp *lý tưởng (A= ∞*):

$$\begin{cases} i^+(t) \simeq 0; i^-(t) \simeq 0 \\ \varphi_a(t) \simeq \varphi_b(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I^+(p) \simeq 0; I^-(p) \simeq 0 \\ \varphi_a(p) \simeq \varphi_b(p) \end{cases}$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

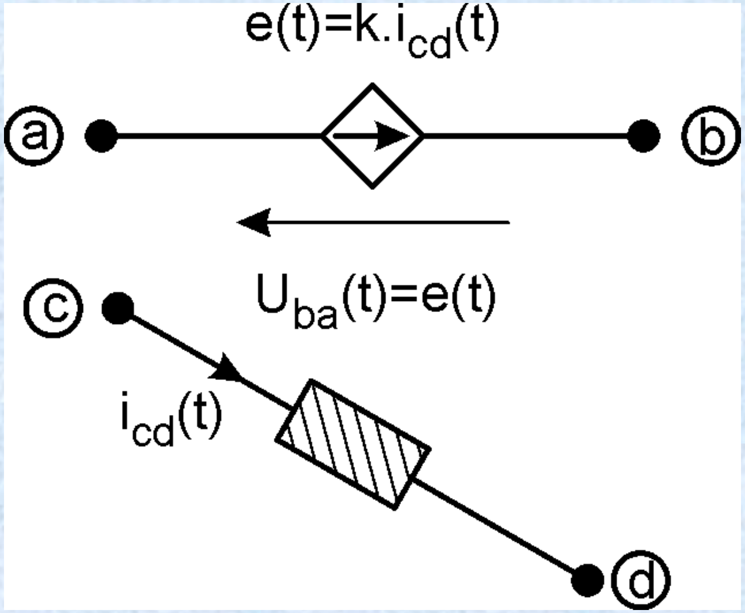
- Các nguồn phụ thuộc

a) Nguồn áp phụ thuộc áp



$$e(t) = k \cdot u_{cd}(t) \rightarrow E(p) = k \cdot U_{cd}(p)$$

b) Nguồn áp phụ thuộc dòng

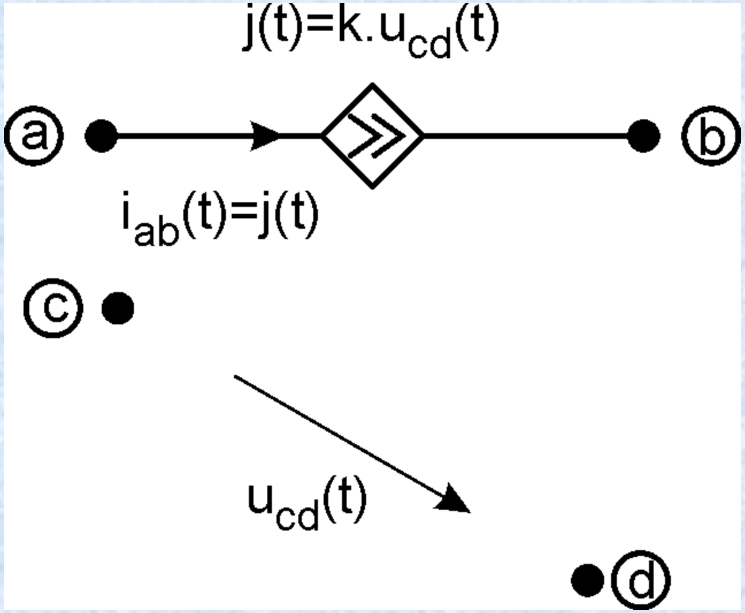


$$e(t) = k \cdot i_{cd}(t) \rightarrow E(p) = k \cdot I_{cd}(p)$$

12.3. Ảnh Laplace của các phần tử mạch điện

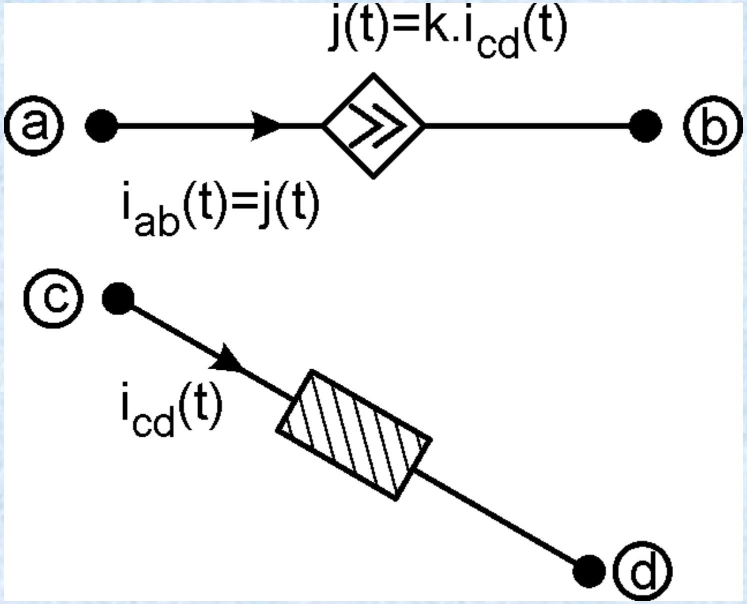
- Các nguồn phụ thuộc

c) Nguồn dòng phụ thuộc áp



$$j(t) = k \cdot u_{cd}(t) \rightarrow J(p) = k \cdot U_{cd}(p)$$

d) Nguồn dòng phụ thuộc dòng



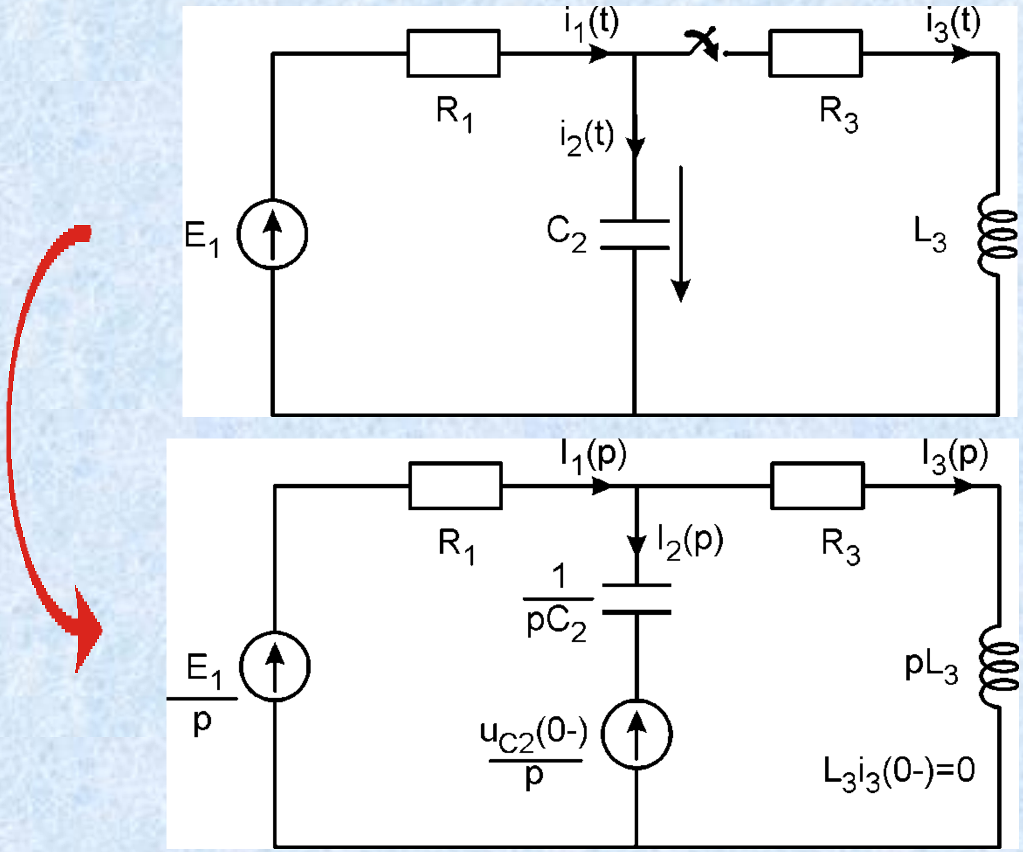
$$j(t) = k \cdot i_{cd}(t) \rightarrow J(p) = k \cdot I_{cd}(p)$$

12.4. Ảnh Laplace của mạch điện

<u>Chú ý:</u> 1. Vẽ cho mạch <u>*sau*</u> thời điểm quá độ

2. Có thể có các nguồn phát sinh trên nhánh chứa C hoặc L

3. Chiều của các nguồn điện áp phát sinh trên các phần tử L, C và các nhóm cuộn dây có hỗ cảm!



12.5. Hệ phương trình của mạch ảnh Laplace

- Do ảnh Laplace là toán tử tuyến tính → hình dạng các ảnh phương trình K hoàn toàn tương tự các phương trình cho mạch ảnh phức.

→ Có thể áp dụng *tất cả các phương pháp đã biết* để lập và giải mạch ảnh Laplace của mạch điện trong quá trình quá độ. Điểm khác biệt so với mạch ảnh phức đó là các hệ số không phải là số phức mà là các hàm (tỷ số các đa thức) theo *p*.

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Ta xét trường hợp thời điểm bắt đầu quá độ tại t=0. Giải mạch bằng phương pháp ảnh Laplace gồm 4 bước:

Bước 1: Xác định các sơ kiện từ mạch *trước* quá độ ở chế độ *xác lập*.

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace bằng các phương pháp "tương tự" như mạch DC và mạch ảnh phức AC → các tín hiệu U(p) và I(p) (tạm thời chưa xét công suất)

Bước 4: Tìm ảnh ngược $u(t)=L^{-1}(U(p))$,… (bằng phương pháp Heaviside):

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

4.3: Tổng hợp nghiệm

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Chú ý:

1. Trường hợp thời điểm quá độ $t_0 \neq 0$, ta có thể dùng phép đặt biến dịch trục thời gian $t' = t - t_0$ để đưa về giải mạch quá độ tại $t' = 0$.
2. Bước 1 và bước 3 của phương pháp vẫn sử dụng các phương pháp đã biết để giải mạch xác lập.
3. Do mạch ảnh Laplace có thể có các nguồn phát sinh nên phương pháp tổng trở tương đương và phương pháp xếp chồng không thực sự phù hợp!
4. Trường hợp mạch có mạng hai cửa, ta thường chỉ xét mạng hai cửa thuần trở (khi đó, trong mạch ảnh Laplace ta sẽ có cùng một ma trận như đối với trường hợp xác lập). Đồng thời nếu mạng hai cửa có chứa L và C thì ta sẽ không đủ thông tin để xây dựng các nguồn phát sinh và tính toán lại thông số mạng hai cửa trong mạch ảnh Laplace!

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

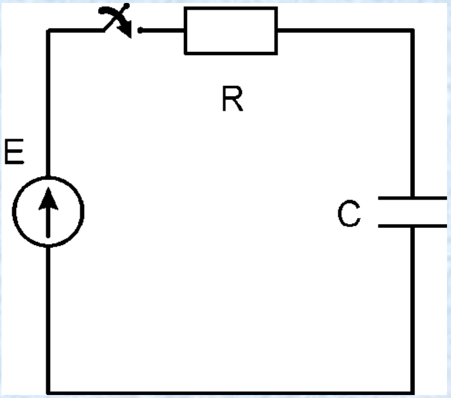
Các ví dụ:

1. Mạch R-C nguồn 1 chiều
2. Mạch R-C nguồn xoay chiều
3. Mạch R-L-C nối tiếp có nguồn 1 chiều
4. Mạch R-L-C nối tiếp có nguồn xoay chiều
5. Mạch phức hợp
6. Mạch có mạng hai cửa
7. Quá độ có hỗ cảm
8. Mạch có OP-AMP
9. Mạch có nguồn phụ thuộc
10. …

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Các ví dụ:

1. Mạch R-C nguồn 1 chiều

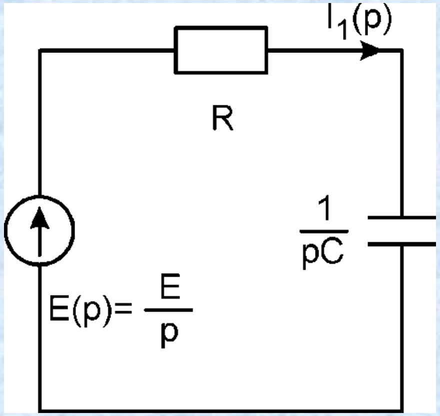


Giải mạch điện quá độ như hình vẽ, biết

$E = 12V; R = 5\Omega; C = 0,1F.$

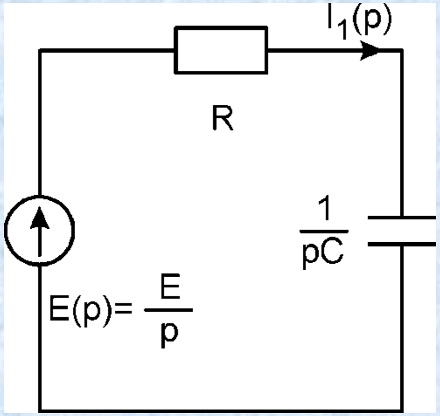
Bước 1: Trước quá độ ta có $u_C(0-)=0$.

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace



$$U_C(p)=\frac{\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}}\frac{E}{p}=\frac{E}{p\left(pRC+1\right)}=\frac{12}{p(0,5p+1)}$$

Bước 4: Tìm ảnh ngược u(t)=L^{-1}(U(p)),… (bằng phương pháp Heaviside)

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số $p_0=0; p_1=-2.$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i=\left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i}=\left.\frac{12}{p+1}\right|_{p=p_i}\rightarrow A_0=12; A_1=-12$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

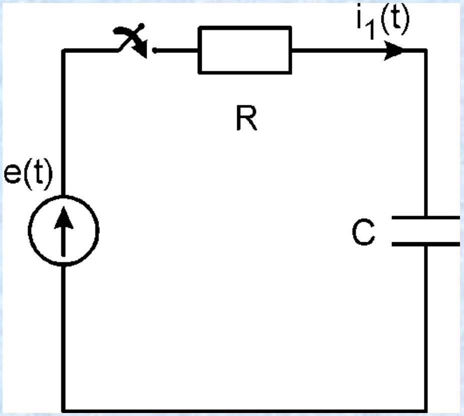
$$u_C(t)=A_0e^{p_0t}+A_1e^{p_1t}=12-12e^{-2t}$$

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

2. Mạch R-C nguồn xoay chiều

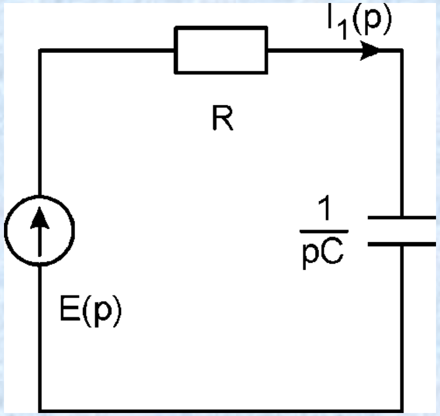
Giải mạch điện quá độ như hình vẽ, biết

$$e(t) = E_0 \sin\left(\omega t\right) = 12\sin(5t) \quad V; R = 5\Omega; C = 0{,}1F.$$

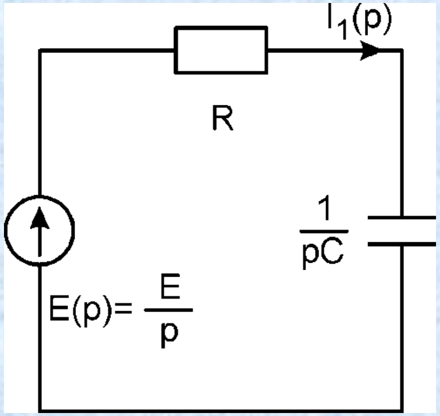


Bước 1: Trước quá độ ta có $u_C(0\text{-})=0$.

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace



Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace

$$U_C(p)=\frac{\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}}E(p)=\frac{\frac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}}{(pRC+1)}=\frac{60}{\left(p^2+25\right)(0,5p+1)}$$

Bước 4: Tìm ảnh ngược

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0=-2;\ p_1=j5;\ p_2=-j5\left(=p_1^*\right)$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i=\left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i}=\left.\frac{60}{1,5p^2+2p+12,5}\right|_{p=p_i}$$

$$\rightarrow A_0=4,138;\ A_1=-2,069-j0,828=2,228\measuredangle-158,20^\circ$$

$$\rightarrow A_2=A_1^*=2,228\measuredangle158,20^\circ$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

$$u_C(t)=A_0e^{p_0t}+A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=4,138\cdot e^{-2t}+2\cdot2,228\cdot\cos\left(5t-158,20^\circ\right)$$

$$=4,138\cdot e^{-2t}+4,456\cdot\sin\left(5t-68,20^\circ\right)$$

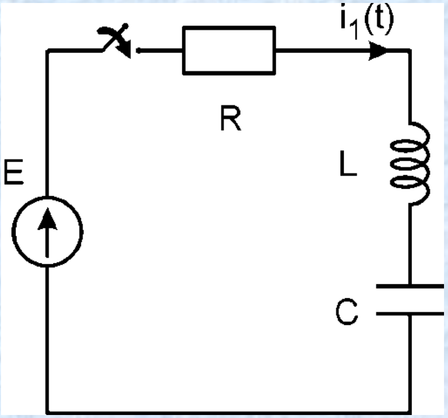
Bài tập: Kiểm chứng lại kết quả quá trình xác lập sau quá độ!

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

3. Mạch R-L-C nối tiếp và nguồn 1 chiều

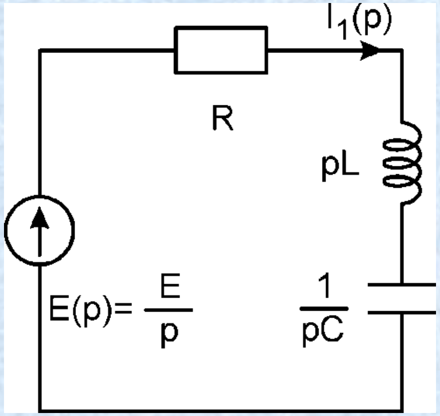
Giải mạch điện quá độ như hình vẽ, biết

$$E = 12V; R = 9\Omega; L = 1H; C = 0,05F.$$

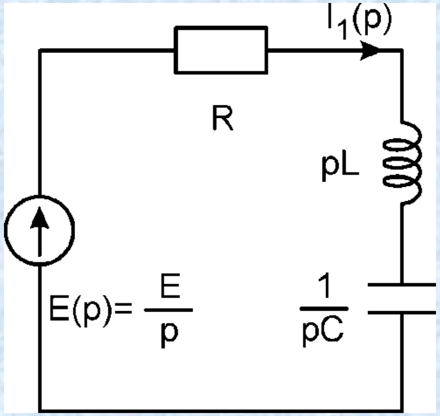


Bước 1: Trước quá độ ta có $u_C(0-)=0$, $i_L(0-)=0$.

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace



Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace

$$I_L(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E}{p^2L + pR + \frac{1}{C}} = \frac{12}{p^2 + 9p + 20}$$

Bước 4: Tìm ảnh ngược

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0 = -4; p_1 = -5.$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{12}{2p+9}\right|_{p=p_i} \rightarrow A_0 = 12; A_1 = -12.$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

$$i_L(t) = A_0 e^{p_0 t} + A_1 e^{p_1 t} = 12 \cdot e^{-4t} - 12 \cdot e^{-5t}$$

Bài tập: 1. Tính điện áp trên tụ $u_C(t)$.

2. Kiểm chứng lại với trường hợp bộ số R-L-C cho nghiệm phức.

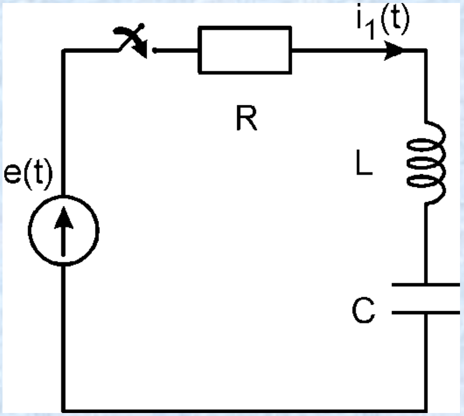
3. So sánh với kết quả từ phương pháp tích phân kinh điển.

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

4. Mạch R-L-C nối tiếp và nguồn xoay chiều

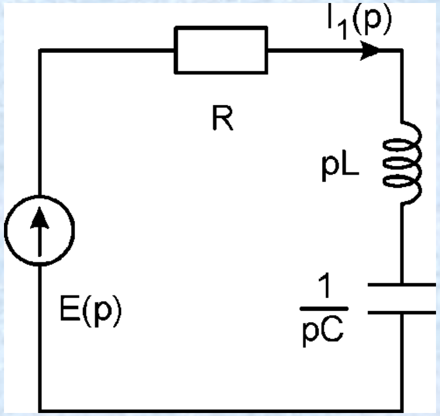
Giải mạch điện quá độ như hình vẽ, biết

$$e(t) = 12\sin(2t)\quad V; R = 9\Omega; L = 1H; C = 0,05F.$$



Bước 1: Trước quá độ ta có $u_C(0\text{-})=0$, $i_L(0\text{-})=0$.

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace

$$I_L(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{p\dfrac{24}{p^2+4}}{p^2+9p+20} = \frac{24p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9p+20\right)}$$

Bước 4: Tìm ảnh ngược

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0 = -4; p_1 = -5; p_2 = j2; p_3 = -j2\left(= p_2^*\right).$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{24p}{4p^3+27p^2+48p+36}\right|_{p=p_i}$$

$$\rightarrow A_0 = -4,8; A_1 = 4,138; A_2 = 0,331 + j0,372 = 0,498\measuredangle 48,37^\circ$$

$$\rightarrow A_3 = A_2^* = 0,498\measuredangle -48,37^\circ.$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

$$i_L(t) = A_0e^{p_1t} + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} + A_3e^{p_3t} = -4,8\cdot e^{-4t} + 4,138\cdot e^{-5t} + 2\cdot 0,498\cdot\cos\left(2t+48,37^\circ\right)$$

$$= -4,8\cdot e^{-4t} + 4,138\cdot e^{-5t} + 0,996\cdot\sin\left(2t+138,37^\circ\right)$$

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bài tập: 1. Tính điện áp trên tụ $u_C(t)$.

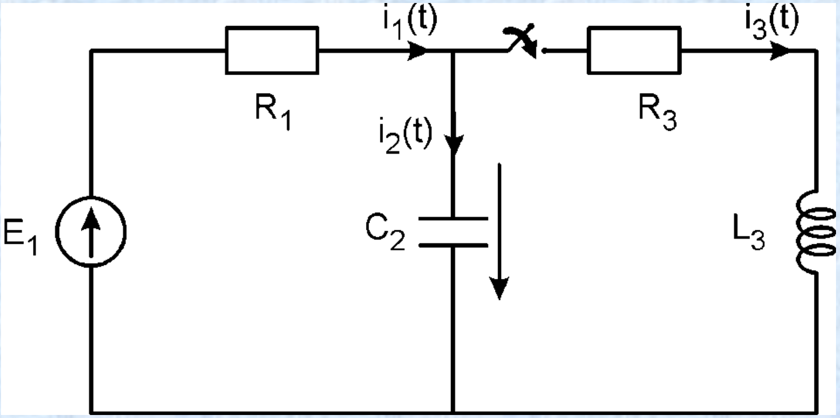
2. Kiểm chứng lại với trường hợp bộ số R-L-C cho nghiệm phức? Khi đó tần số "riêng" và tần số nguồn ảnh hưởng thế nào tới tín hiệu?

3. So sánh với kết quả từ phương pháp tích phân kinh điển.

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

5. Mạch ví dụ khác:

Giải mạch điện quá độ như hình vẽ với



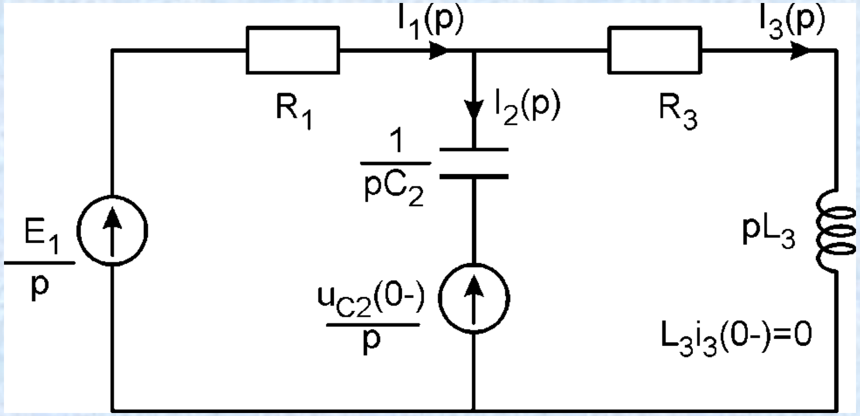
$$E_1 = 18\ \ V; R_1 = 2\Omega; C_2 = 0,5F;$$

$$R_3 = 4\Omega; L_3 = 1H;$$

Bước 1: Trước quá độ ta có

$$u_{C2}(0-) = E_1 = 18; i_{L3}(0-) = 0;$$

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch <u>*sau*</u> thời điểm quá độ



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace (ví dụ theo phương pháp điện thế nút)

$$U_{C2}(p)=\frac{\dfrac{E_1(p)}{R_1}+C_2U_{C2}(0-)}{\dfrac{1}{R_1}+pC_2+\dfrac{1}{R_3+pL_3}}=\frac{\left(E_1(p)+R_1C_2U_{C2}(0-)\right)\left(pL_3+R_3\right)}{p^2R_1L_3C_2+p\left(R_1R_3C_2+L_3\right)+\left(R_1+R_3\right)}=\frac{\left(18p+18\right)\left(p+4\right)}{p\left(p^2+5p+6\right)}$$

Bước 4: Tìm ảnh ngược

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0=0; p_1=-2; p_2=-3.$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i=\left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i}=\left.\frac{\left(18p+18\right)\left(p+4\right)}{3p^2+10p+6}\right|_{p=p_i}$$

$$\rightarrow A_0=12; A_1=18; A_2=-12.$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

$$u_{C2}(t)=A_0e^{p_0t}+A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=12+18\cdot e^{-2t}-12\cdot e^{-3t}$$

<u>*Bài tập:*</u> 1. Tính dòng qua cuộn dây $i_{L3}(t)$.

2. Tính lại mạch với nguồn $e_1(t)$ xoay chiều điều hòa (chú ý sơ kiện)

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

6. Mạch có mạng hai cửa:

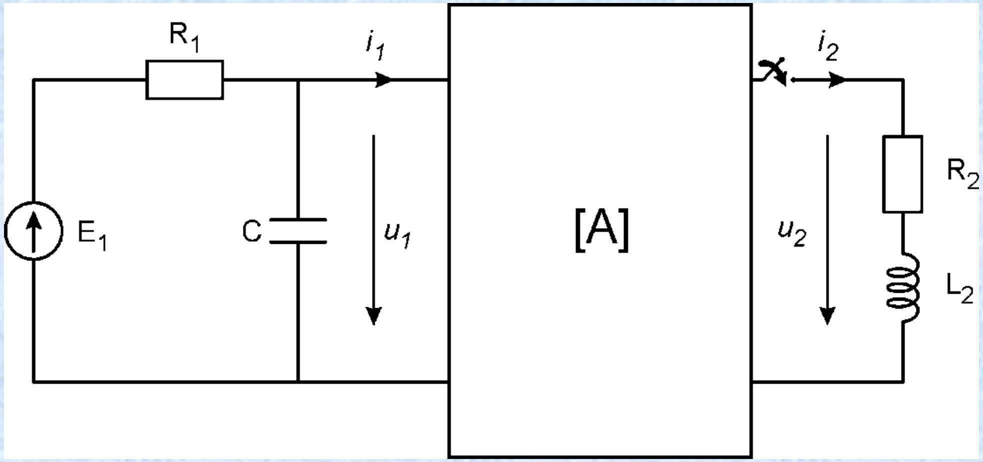
Giải mạch điện quá độ như hình vẽ, biết

$E_1 = 18\ V; R_1 = 2\Omega; C = 0,25F;$

$R_2 = 4\Omega; L_2 = 1H.$

Mạng hai cửa thuần trở có ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0,5 & 3 \end{bmatrix}.$$

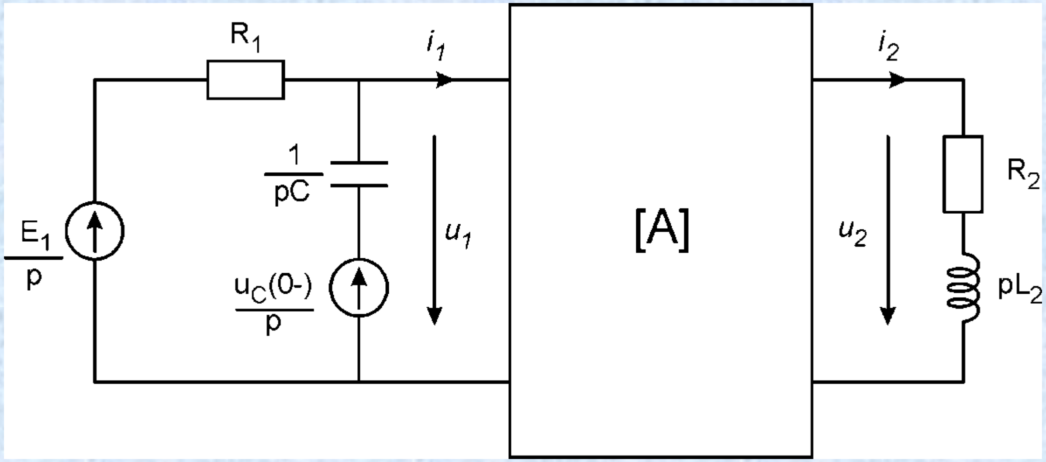


Bước 1: Trước quá độ ta có: $u_C(0-) = 12; i_{L2}(0-) = 0;$

(do đầu ra hở mạch nên $R_{vào} = a_{11}/a_{21} = 4 \rightarrow I_1 = 3 \rightarrow U_1 = 12$)

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ



Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace (ví dụ theo phương pháp điện thế nút + tổng trở vào mạng hai cửa)

$$Z_{vμo} = \frac{a_{11} \cdot Z_2 + a_{12}}{a_{21} \cdot Z_2 + a_{22}} = \frac{2(p+4)+10}{0,5(p+4)+3} = \frac{2p+18}{0,5p+5} = \frac{4p+36}{p+10}$$

$$U_C(p) = \frac{\dfrac{E_1(p)}{R_1} + CU_C(0-)}{\dfrac{1}{R_1} + pC + \dfrac{1}{Z_{vμo}}} = \frac{\dfrac{9}{p}+3}{\dfrac{1}{2} + 0,25p + \dfrac{p+10}{4p+36}} = \frac{(3p+9)(4p+36)}{p\left(p^2+12p+28\right)}$$

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 4: Tìm ảnh ngược

4.1: Tìm nghiệm của đa thức mẫu số: $p_0 = 0; p_1 = -3,172; p_2 = -8,828.$

4.2: Tìm các hệ số tương ứng

$$A_i = \left.\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}\right|_{p=p_i} = \left.\frac{(3p+9)(4p+36)}{3p^2+24p+28}\right|_{p=p_i}$$

$$\rightarrow A_0 = 11,571; A_1 = 0,669; A_2 = -0,24.$$

4.3: Tổng hợp nghiệm (Cho t≥0)

$$u_C(t) = A_0 e^{p_1 t} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 11,571 + 0,669 \cdot e^{-3,172t} - 0,24 \cdot e^{-8,828t}$$

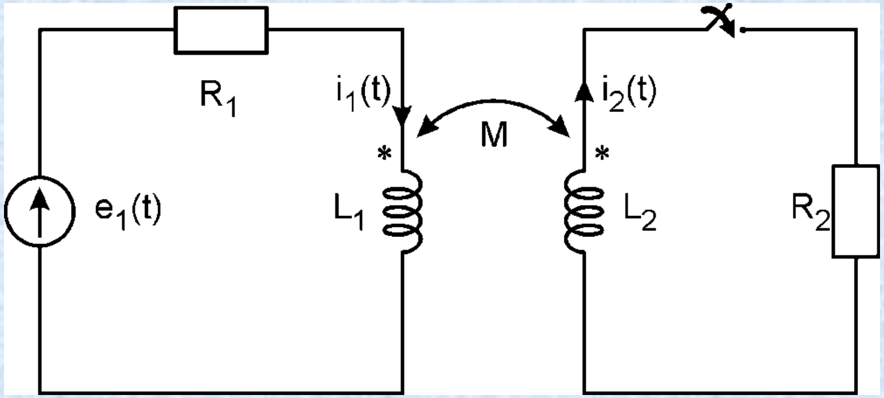
__Bài tập:__ 1. Tính dòng qua cuộn dây $i_{L2}(t)$. Tính các tín hiệu khác trong mạch.

2. Tính lại với trường hợp khóa K mở ra.

3. Tính lại mạch với nguồn $e_1(t)$ xoay chiều điều hòa (chú ý sơ kiện)

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

7. Mạch có hỗ cảm:



Cho mạch điện như hình vẽ, biết

$e_1 = 220\sqrt{2}\sin(314t) \quad V;$

$R_1 = 2\Omega; L_1 = 0,01H;$

$R_2 = 20\Omega; L_2 = 0,02H; M = 0,012H.$

Bước 1: Trước quá độ ta có:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j\omega L_1} = 59,095\measuredangle -57,51^\circ$$

$$\rightarrow i_{L1}(0-) = 59,095\sqrt{2}\sin(-57,51^\circ) = -49,846$$

$$i_{L2}(0-) = 0;$$

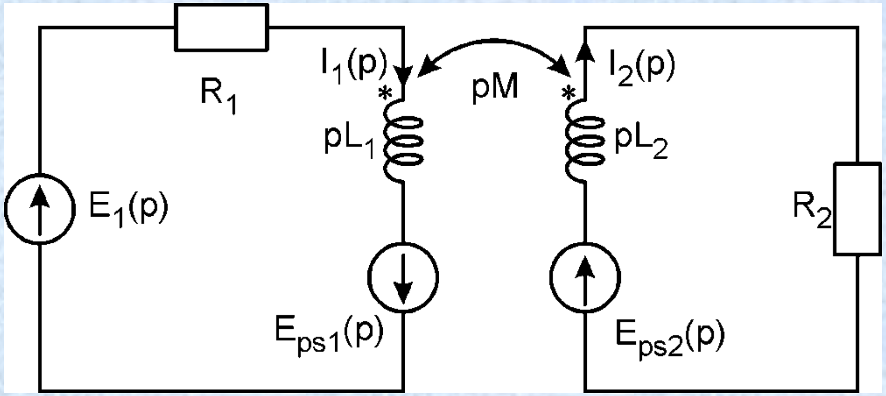
12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ

$$E_1(p) = \frac{220\sqrt{2}\cdot 314}{p^2 + 314^2}$$

$$E_{ps1}(p) = L_1 \cdot i_{L1}(0-) - M \cdot i_{L2}(0-) = -0,498.$$

$$E_{ps2}(p) = L_2 \cdot i_{L2}(0-) - M \cdot i_{L1}(0-) = 0,598.$$



Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace (ví dụ theo phương pháp dòng vòng)

$$\begin{cases} I_1(p)\left(R_1 + pL_1\right) - I_2(p)\cdot pM & = & E_1(p) + E_{ps1}(p) \\ -I_1(p)\cdot pM + I_2(p)\left(R_2 + pL_2\right) & = & E_{ps2}(p) \end{cases}$$

Giải hệ ta có ảnh Laplace của các dòng nhánh (cũng là các dòng vòng).

Bài tập: 1. Hoàn thiện nốt các tính toán cho các dòng nhánh.

2. Tính cho trường hợp khóa K mở ra.

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

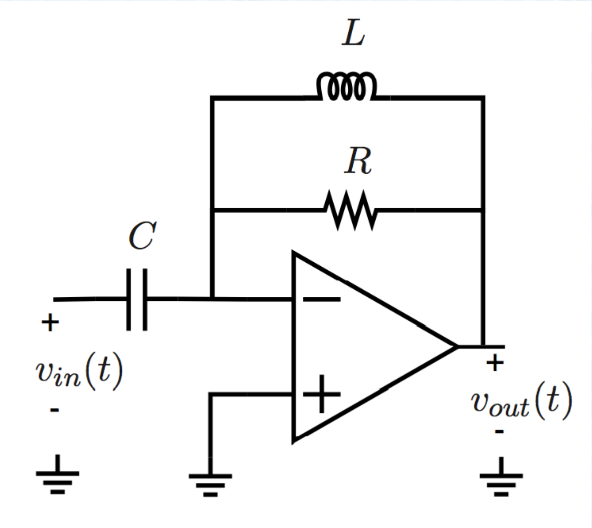
8. Mạch có OP-AMP:

Cho mạch điện như hình vẽ, biết

$v_{in}(t) = 12 \cdot 1(t) V;$

$R = 5\Omega; L = 0,1H;$

$C = 0,02F.$



Bước 1: Trước quá độ ta có:

$$u_C(0-) = 0; i_L(0-) = 0;$$

Bước 2: Vẽ mạch ảnh Laplace cho mạch *sau* thời điểm quá độ

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace

12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

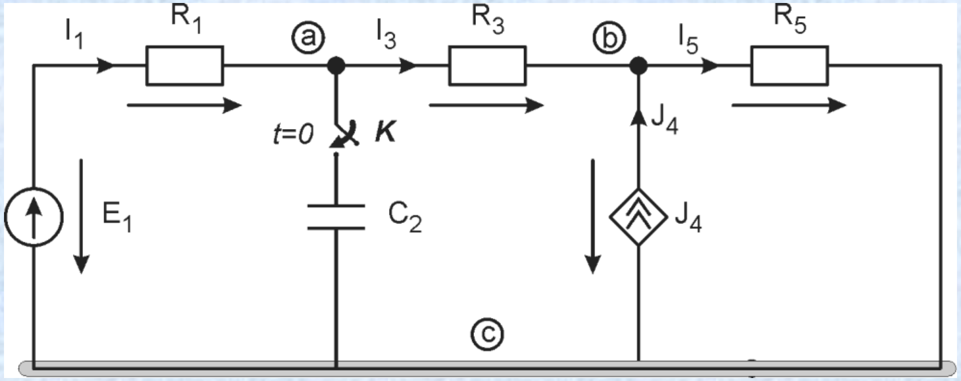
9. Mạch có nguồn phụ thuộc:

Cho mạch điện như hình vẽ, biết:

$$E_1 = 24 \quad V; J_4 = 2,5 I_1;$$

$$R_1 = 5\Omega; R_3 = 10\Omega;$$

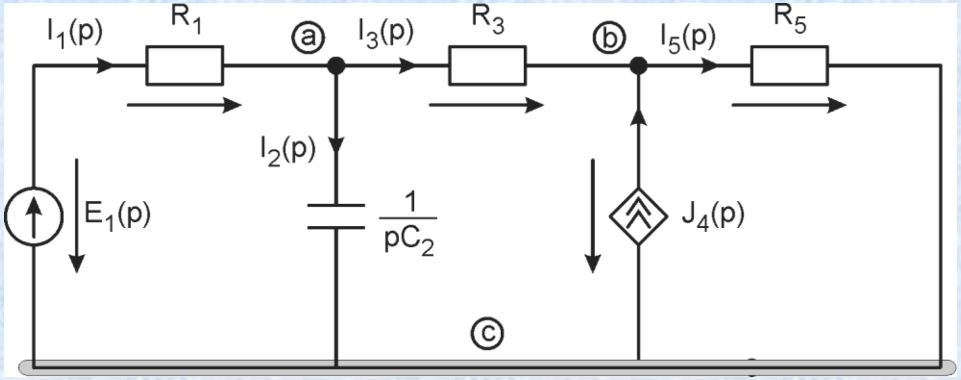
$$R_5 = 5\Omega; C_2 = 0,2F;$$



Bước 1: Trước quá độ ta có:

$$u_{C2}(0-) = 0;$$

Bước 2: Mạch ảnh Laplace



12.6. Phương pháp giải QTQĐ bằng ảnh Laplace

Bước 3: Giải mạch ảnh Laplace (ví dụ theo phương pháp điện thế nút)

<u>Bài tập:</u> 1. Hoàn thiện nốt các tính toán cho các dòng nhánh.

2. Tính cho các dạng nguồn phụ thuộc khác.

Phần III: Mạch phi tuyến

Chương I: Các khái niệm, hiện tượng và các bài toán cơ bản

Chương II: Mạch phi tuyến ở chế độ hằng

Chương III: Mạch phi tuyến ở chế độ dừng

Chương IV: Mạch phi tuyến ở chế độ xếp chồng

Chương V: Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ

Chương I: Các khái niệm, hiện tượng và các bài toán cơ bản

1.1. Các phần tử phi tuyến

1.2. Mạch điện phi tuyến

1.3. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình đại số phi tuyến

1.5. Một số bài toán cơ bản trong mạch phi tuyến

1.1. Các phần tử phi tuyến

a. Các phần tử tải tuyến tính trong mạch điện:

- Gồm R, L, C, M
- Phương trình đặc trưng của các phần tử là phương trình tuyến tính
- (Nhắc lại) Định nghĩa hàm f(x) là hàm tuyến tính khi:

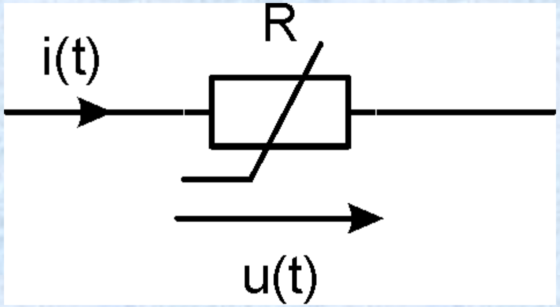
$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

- Phần tử phi tuyến: là phần tử có phương trình đặc trưng ***<u>không phải là phương trình tuyến tính</u>***

1.1. Các phần tử phi tuyến

b. Các phần tử tải phi tuyến trong mạch điện:

b.1. Điện trở R phi tuyến:



- Phương trình đặc trưng quan hệ u-i của điện trở là phương trình phi tuyến.
- Có 3 dạng chính để mô tả quan hệ phi tuyến:
  - Cho theo hàm: u=f(i) hoặc i=f(u)
  - Cho theo đồ thị: Đường cong u=f(i) hoặc i=f(u)
  - Cho theo bảng: Đường gấp khúc tuyến tính từng đoạn

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.1. Điện trở R phi tuyến (2)

Ví dụ:

- Hàm phi tuyến

$$u(t) = 5 \cdot i(t) + 0,3 \cdot i^3(t)$$

$$i(t) = 0,2 \cdot u(t) + 0,001 \cdot u^3(t)$$

Chú ý:

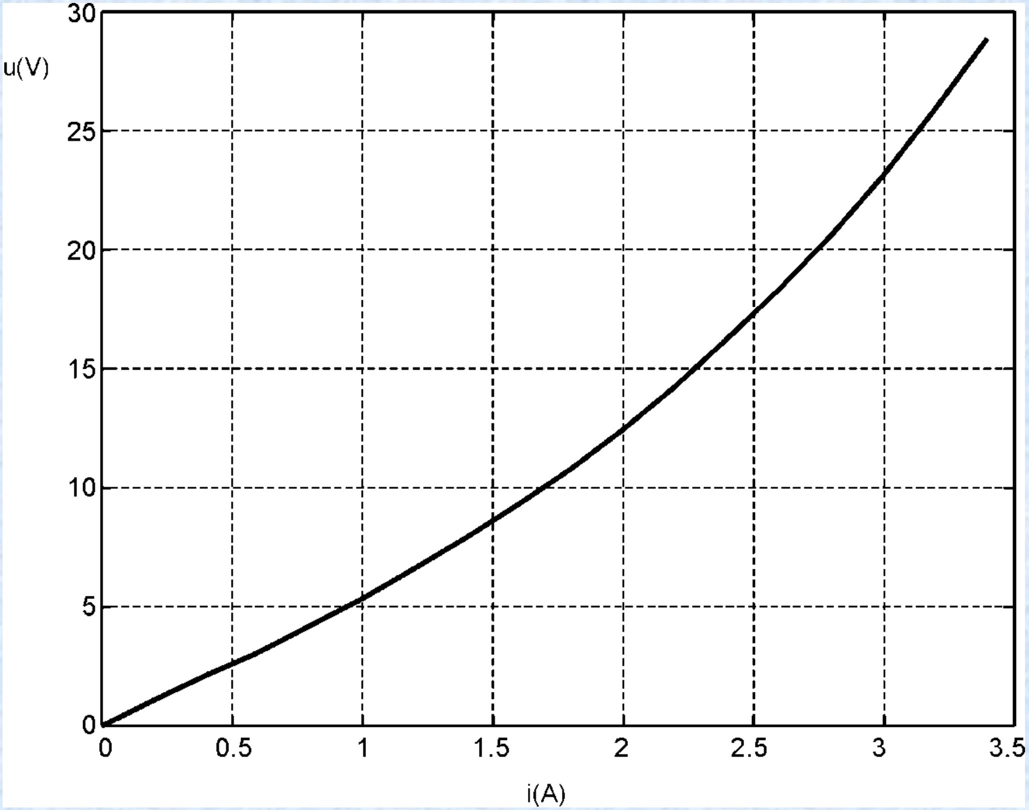
- Thông thường ta tạm xét phần tử R có đặc tính đối xứng nên khi đó hàm đặc tính là hàm lẻ

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.1. Điện trở R phi tuyến (3)

Ví dụ:

- Đồ thị đặc tính:



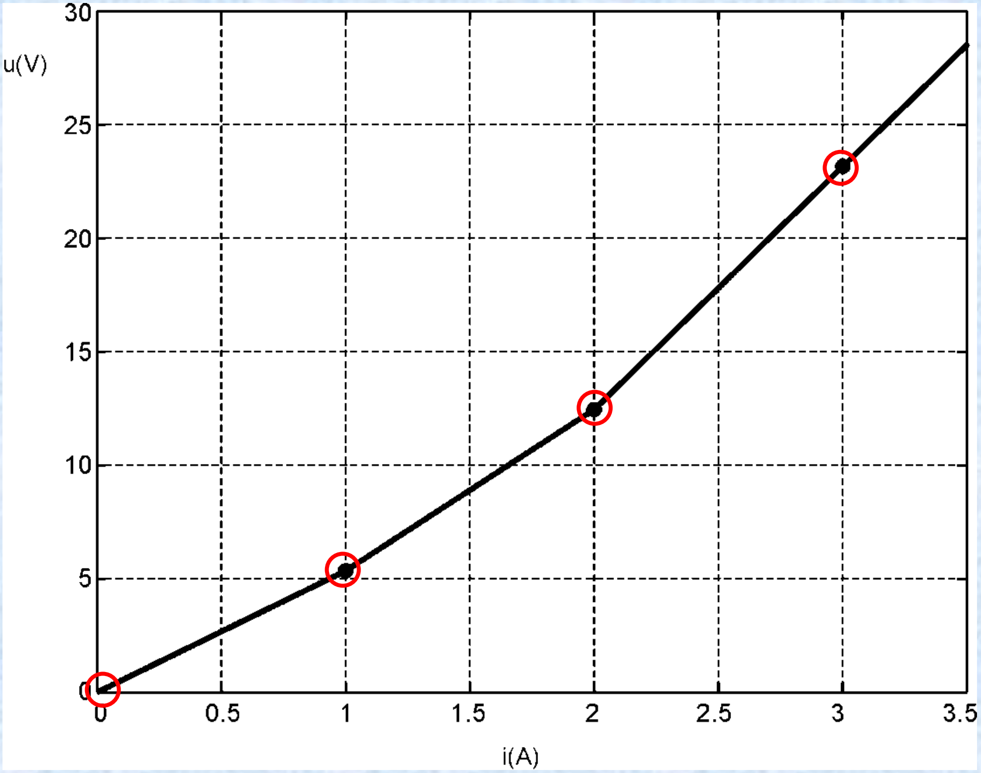
Chú ý: ta thường có đặc tính cho trong góc phần tư thứ nhất, đặc tính trong góc phần tư thứ ba được lấy đối xứng tâm.

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.1. Điện trở R phi tuyến (4)

- Bảng đặc tính: thực chất tương đương với một đồ thị được tuyến tính hóa từng đoạn.
- Đoạn đặc tính cuối cùng được ngầm định là *kéo dài ra vô hạn*.

U(V)	0	5,3	12,4	23,1
I(A)	0	1	2	3



Bài tập: Xác định đa thức xấp xỉ các điểm đã cho (bậc của đa thức từ 1 đến (n-1))

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.1. Điện trở R phi tuyến (5)

- Từ đặc tính của phần tử ta có hai dạng “khai thác” thông tin chính:
  - Xác định các giá trị tĩnh: tọa độ của các điểm trên đường đặc tính (từ U→I, từ I → U).

$$i = I_0 \rightarrow u = f(i) = U_0$$
$$u = f(i) = U_0 \rightarrow i = f^{-1}(U_0) = I_0$$

  - Xác định các giá trị động: góc nghiêng của tiếp tuyến tại mỗi điểm của đặc tính (i’(u=U_0), u’(i=I_0)) nhằm tiến tới nhiệm vụ tuyến tính hóa đặc tính xung quanh điểm làm việc

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.1. Điện trở R phi tuyến (6)

Đoạn BC xung quanh điểm A có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của đường đặc tính tại điểm A:

$$BC: u = f(i) \approx a \cdot i - b = f'(i = I_A) \cdot i - \left(f'(i = I_A) \cdot I_A - U_A \right)$$

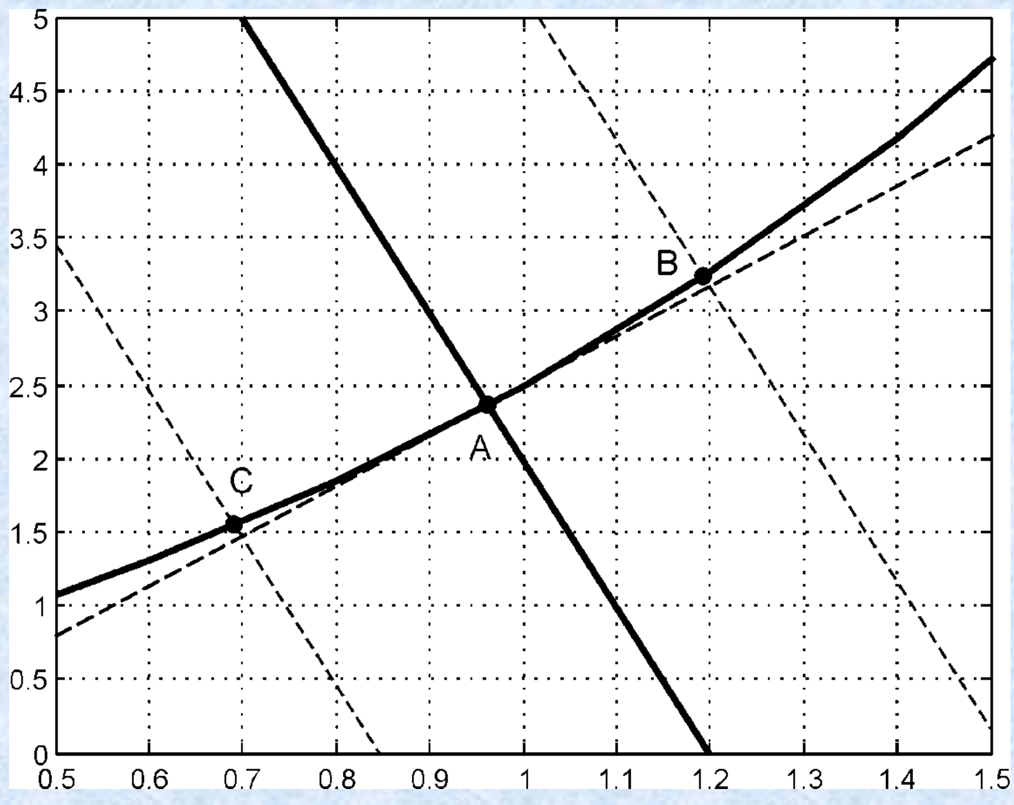
Đặt biến mới:

$$u \approx a \cdot i - b$$

$$a \rightarrow R_{®éng}$$

$$b \rightarrow E_{ph¸t\ sinh} = E_{ps}$$

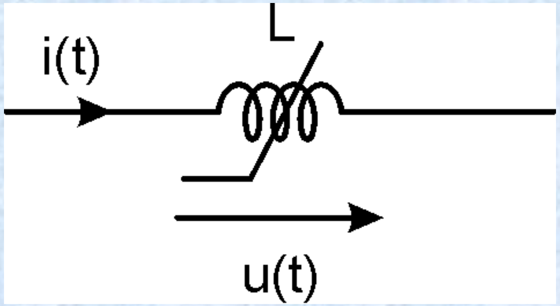
$$\rightarrow u \approx R_{®éng} \cdot i - E_{ps}$$



<u>*Câu hỏi:*</u> 1. Giá trị động tại điểm nối của đường gấp khúc?

2. Giá trị $R_{động}$ khi có i=f(u)?

1.1. Các phần tử phi tuyến



b.2. Cuộn dây L phi tuyến:

- Phương trình đặc trưng quan hệ *từ thông – dòng điện* Ψ – i của cuộn dây là phương trình phi tuyến,
- Quan hệ *Ψ – u bất biến* (như L tuyến tính): $u(t) = \dfrac{d\psi}{dt}$

→ quan hệ u-i của cuộn dây cũng là quan hệ phi tuyến.

- Có 3 dạng chính để mô tả quan hệ phi tuyến:
  - Cho theo hàm: Ψ=f(i) hoặc i=f(Ψ)
  - Cho theo đồ thị: Đường cong Ψ=f(i) hoặc i=f(Ψ)
  - Cho theo bảng: Đường gấp khúc tuyến tính hóa từng đoạn

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.2. Cuộn dây L phi tuyến (2)

Ví dụ:

- Hàm phi tuyến

$$\psi(t) = a \cdot i(t) + b \cdot i^3(t)$$

$$i(t) = a \cdot \psi(t) + b \cdot \psi^3(t)$$

Chú ý:

- Thông thường ta tạm xét phần tử L có đặc tính đối xứng nên khi đó hàm đặc tính là hàm lẻ
- Tạm thời chưa xét hiện tượng từ trễ (LTT, Máy điện)

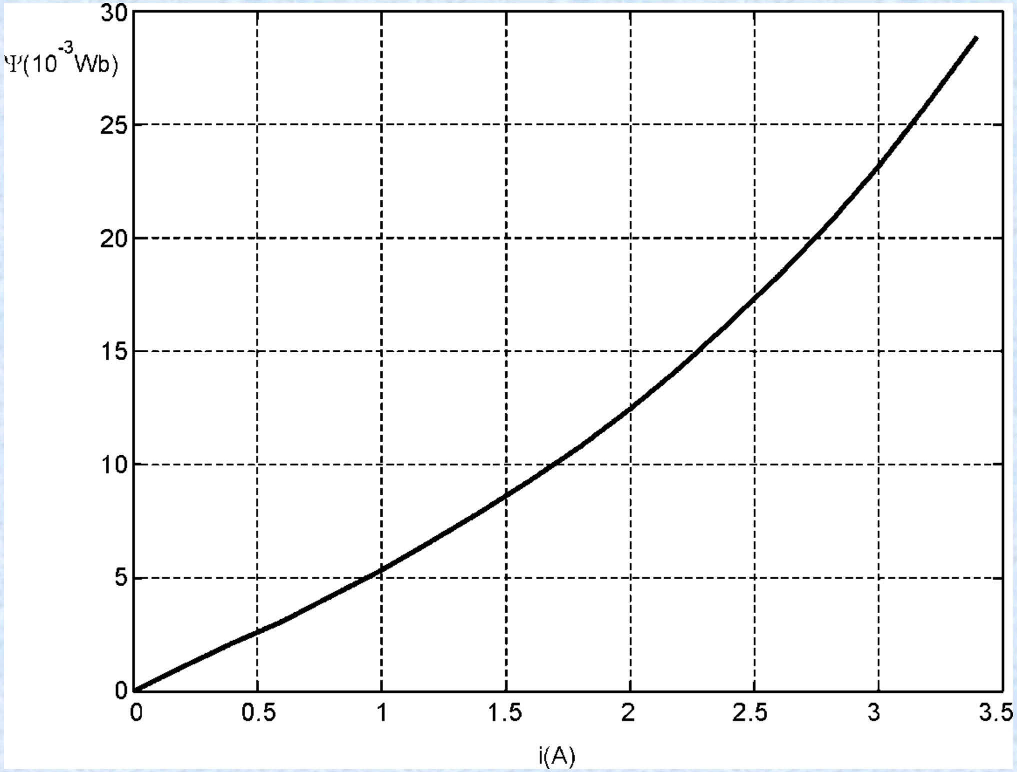
1.1. Các phần tử phi tuyến

b.2. Cuộn dây L phi tuyến (3)

Ví dụ:

- Đồ thị đặc tính:

Chú ý: ta thường có đặc tính cho trong góc phần tư thứ nhất, đặc tính trong góc phần tư thứ ba được lấy đối xứng tâm.

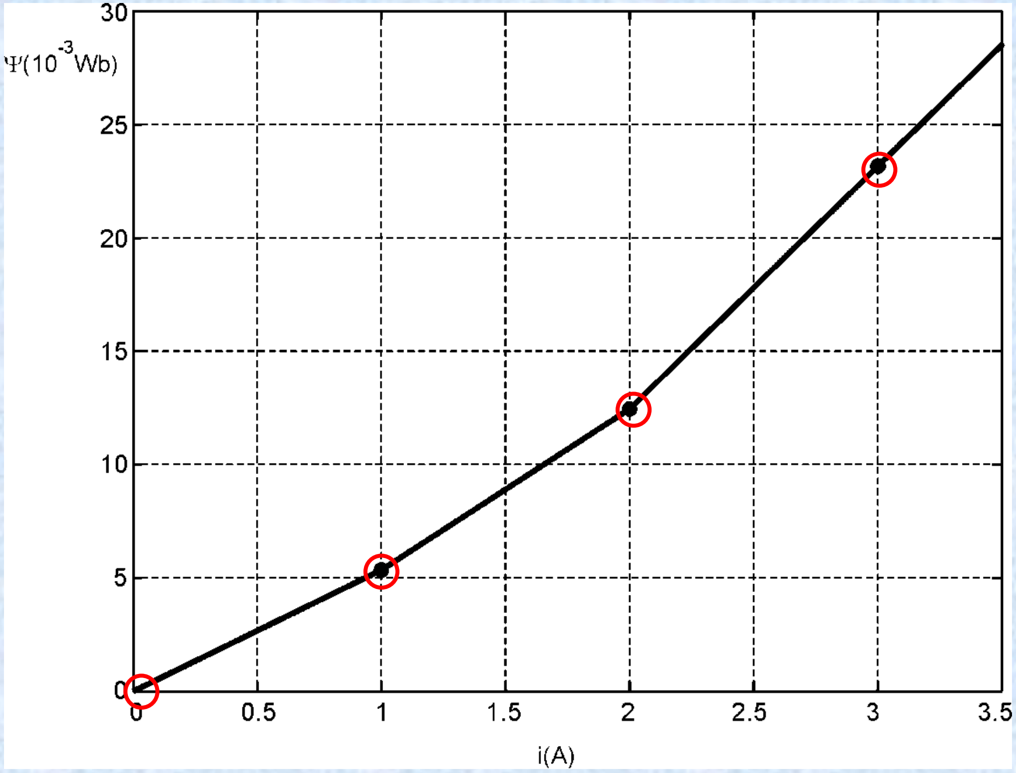


1.1. Các phần tử phi tuyến

b.2. Cuộn dây L phi tuyến (4)

- Bảng đặc tính: thực chất tương đương với một đồ thị được tuyến tính hóa từng đoạn.
- Đoạn đặc tính cuối cùng được ngầm định là *kéo dài ra vô hạn.*

$\psi(10^{-3}$ Wb)	**0**	**5,3**	**12,4**	**23,1**
I(A)	**0**	**1**	**2**	**3**



1.1. Các phần tử phi tuyến

b.2. Cuộn dây L phi tuyến (5)

- Từ đặc tính của phần tử ta có hai dạng “khai thác” thông tin chính:
  - Xác định các giá trị tĩnh: tọa độ của các điểm trên đường đặc tính (từ ψ→I, từ I → ψ).

$$i = I_0 \rightarrow \psi = f(i) = \psi_0$$
$$\psi = f(i) = \psi_0 \rightarrow i = f^{-1}(\psi_0) = I_0$$

  - Xác định các giá trị động: góc nghiêng của tiếp tuyến tại mỗi điểm của đặc tính ($i'(\psi = \psi_0)$, $\psi'(i=I_0)$) nhằm tiến tới nhiệm vụ tuyến tính hóa đặc tính xung quanh điểm làm việc

1.1. Các phần tử phi tuyến

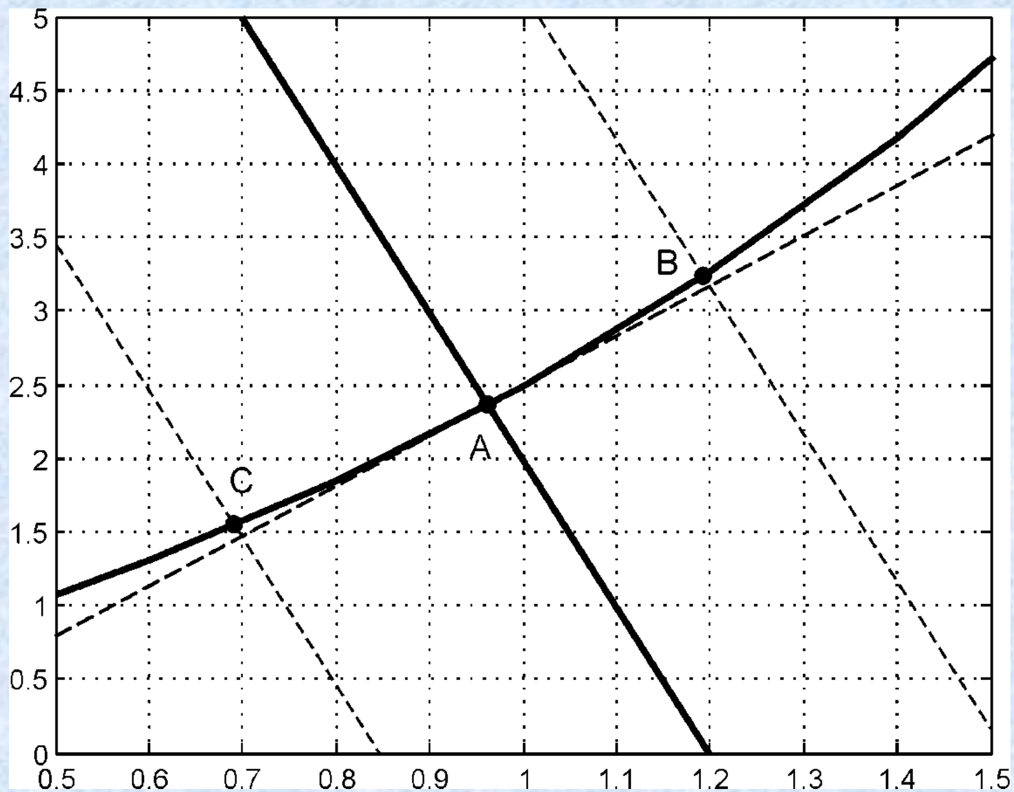
b.2. Cuộn dây L phi tuyến (6)

Đoạn BC xung quanh điểm A có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của đường đặc tính tại điểm A:

$$BC: \psi = f(i) \approx a \cdot i - b = f'(i = I_A) \cdot i - \left(f'(i = I_A) \cdot I_A - \psi_A \right)$$

Tương tự:

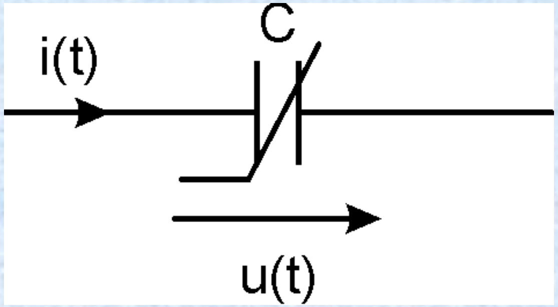
$$BC: \psi \approx L_{\text{®éng}} \cdot i - \psi_{ps}$$



__Câu hỏi:__ Giá trị $L_{\text{động}}$ khi có i=f(ψ)?

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.3. Tụ điện C phi tuyến:



- Phương trình đặc trưng quan hệ *điện tích – điện áp q – u* của tụ điện là phương trình phi tuyến,
- Quan hệ *q – i (như tụ tuyến tính)*: $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$

→ quan hệ u-i của tụ điện cũng là quan hệ phi tuyến.

- Có 3 dạng chính để mô tả quan hệ phi tuyến:
  - Cho theo hàm: q=f(u) hoặc u=f(q)
  - Cho theo đồ thị: Đường cong q=f(u) hoặc u=f(q)
  - Cho theo bảng: Đường gấp khúc tuyến tính hóa từng đoạn

1.1. Các phần tử phi tuyến

b. Các phần tử tải phi tuyến trong mạch điện:

b.3. Tụ điện C phi tuyến (2)

Ví dụ:

- Hàm phi tuyến

$$q(t) = a \cdot u(t) + b \cdot u^3(t)$$

$$u(t) = a \cdot q(t) + b \cdot q^3(t)$$

Chú ý:

- Thông thường ta tạm xét phần tử C có đặc tính đối xứng nên khi đó hàm đặc tính là hàm lẻ.

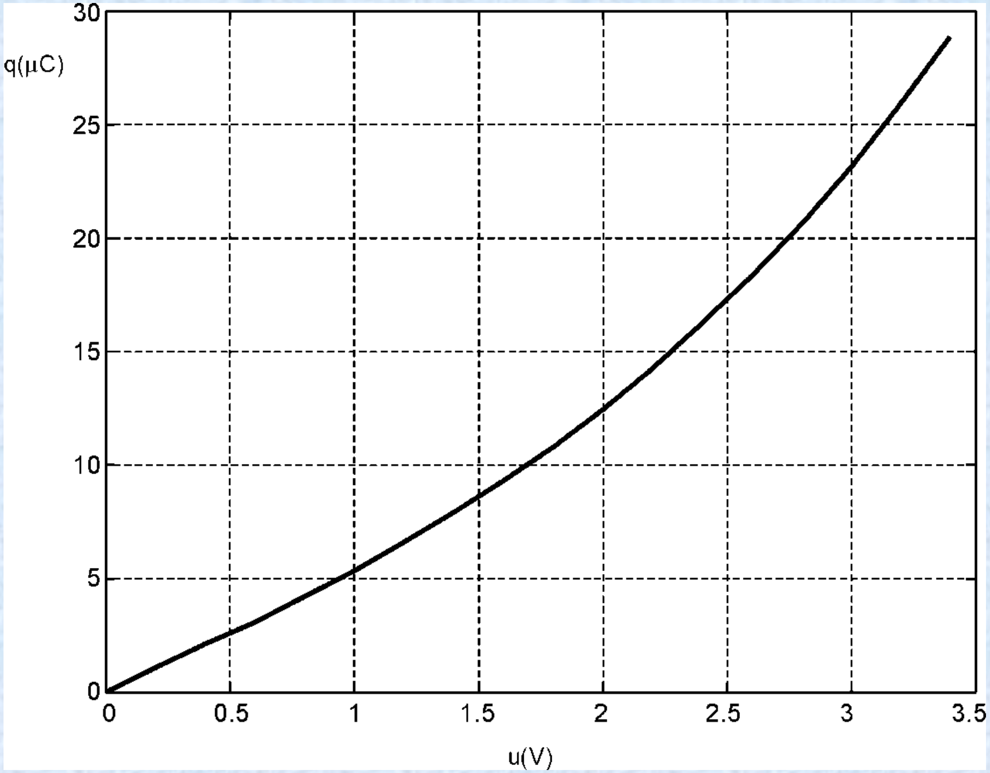
1.1. Các phần tử phi tuyến

b.3. Tụ điện C phi tuyến (3)

Ví dụ:

- Đồ thị đặc tính quan hệ *q-u*:

Chú ý: ta thường có đặc tính cho trong góc phần tư thứ nhất, đặc tính trong góc phần tư thứ ba được lấy đối xứng tâm.

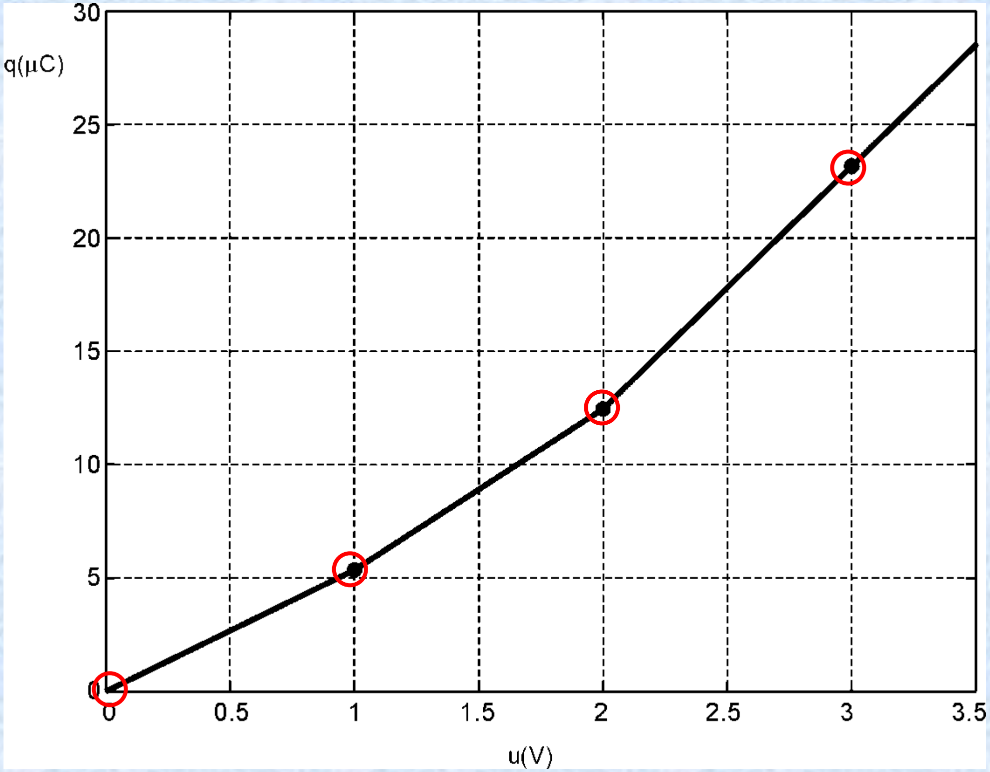


1.1. Các phần tử phi tuyến

b.3. Tụ điện C phi tuyến (4)

- Bảng đặc tính: thực chất tương đương với một đồ thị được tuyến tính hóa từng đoạn.
- Đoạn đặc tính cuối cùng được ngầm định là *kéo dài ra vô hạn*.

q(μC)	**0**	**5,3**	**12,4**	**23,1**
U(V)	**0**	**1**	**2**	**3**



1.1. Các phần tử phi tuyến

b.3. Tụ điện C phi tuyến (5)

- Từ đặc tính của phần tử ta có hai dạng "khai thác" thông tin chính:
  - Xác định các giá trị tĩnh: tọa độ của các điểm trên đường đặc tính (từ Q→U, từ U → Q).

$$u = U_0 \to q = f(u = U_0) = Q_0$$

$$q = f(u) = Q_0 \to u = f^{-1}(q = Q_0) = U_0$$

  - Xác định các giá trị động: góc nghiêng của tiếp tuyến tại mỗi điểm của đặc tính ($q'(u = U_0)$, $u'(q=Q_0)$) nhằm tiến tới nhiệm vụ tuyến tính hóa đặc tính xung quanh điểm làm việc

1.1. Các phần tử phi tuyến

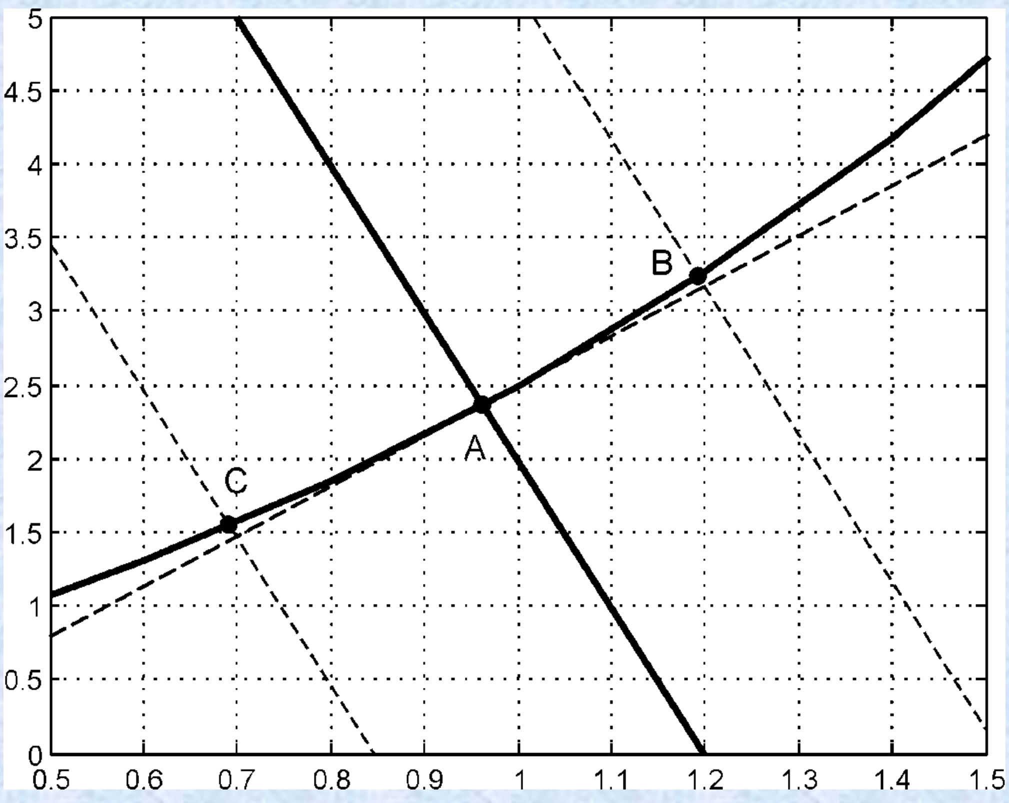
b.3. Tụ điện C phi tuyến (6)

Đoạn BC xung quanh điểm A có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của đường đặc tính tại điểm A:

$$BC: q = f(u) \approx a \cdot u - b = f'(u = U_A) \cdot u - \left(f'(u = U_A) \cdot U_A - Q_A \right)$$

Tương tự:

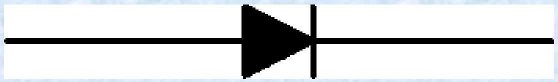
$$BC: q \approx C_{\text{động}} \cdot u - q_{ps}$$

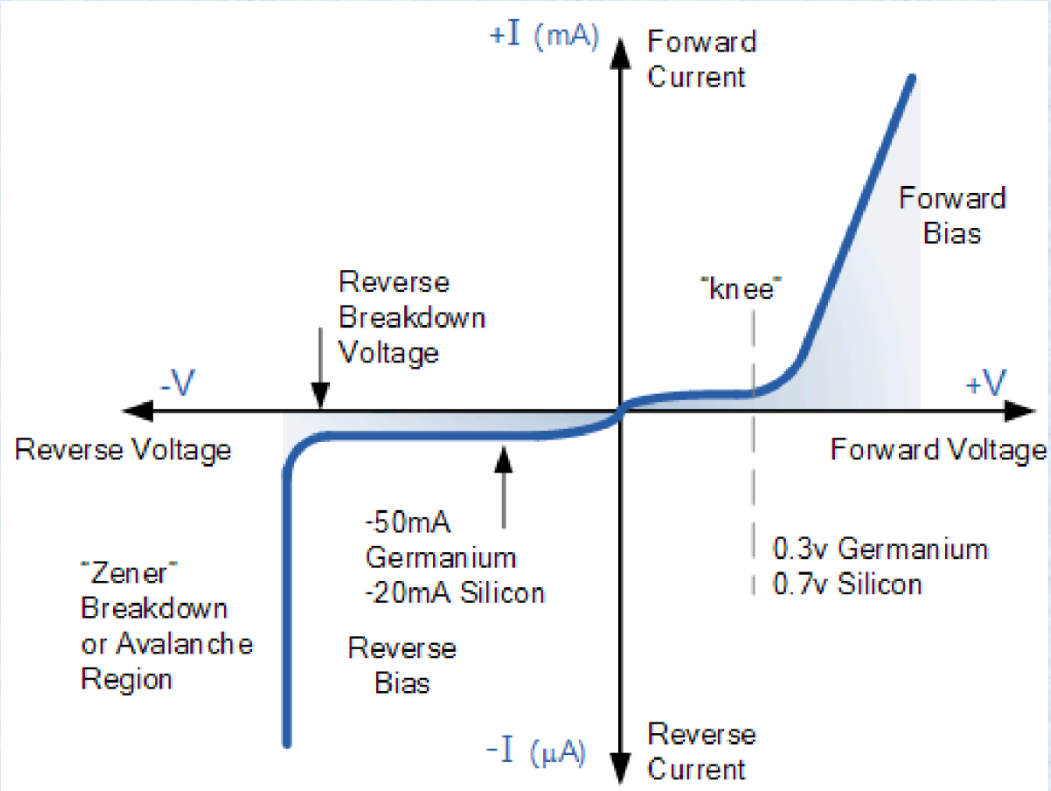


<u>Câu hỏi:</u> Giá trị $C_{\text{động}}$ khi có u=f(q)?

1.1. Các phần tử phi tuyến

b.4. Phần tử diode:

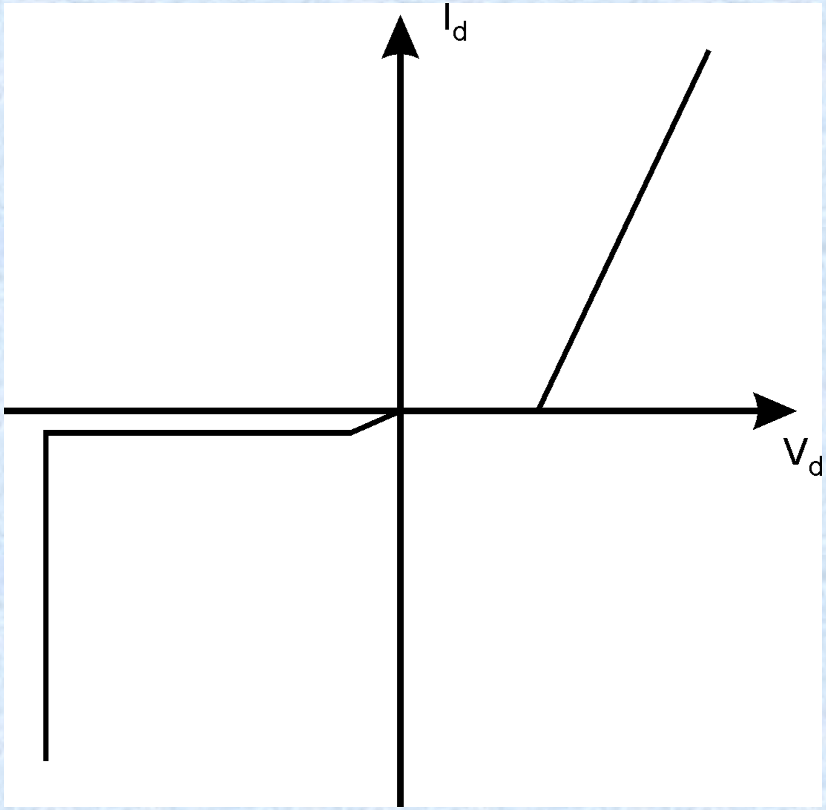




1.1. Các phần tử phi tuyến

b.4. Phần tử diode (2)

Đặc tính xấp xỉ:

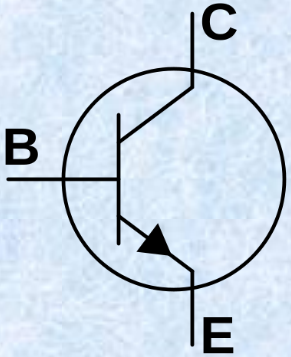


Chú ý:

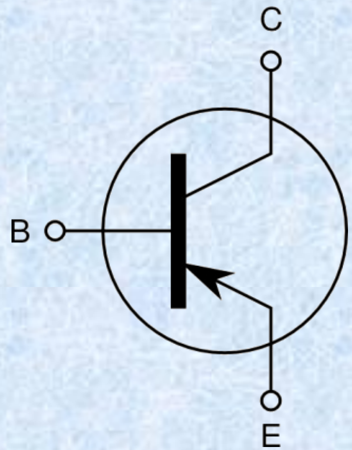
- Đặc tính của diode không đối xứng
- Đoạn đặc tính dẫn có thể xấp xỉ bằng hàm e mũ hoặc đoạn thẳng có độ dốc rất lớn
- Đoạn đặc tính ngược trong thực tế có thể gây hỏng diode

1.1. Các phần tử phi tuyến

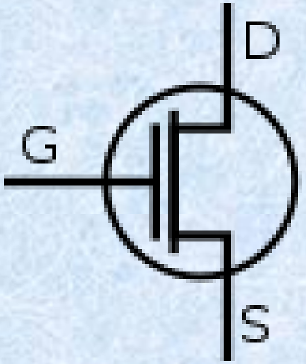
b.5. Transistor



Dòng NPN



Dòng PNP

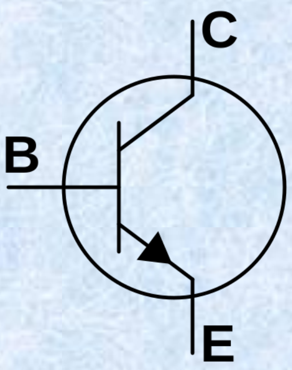


Dòng FET

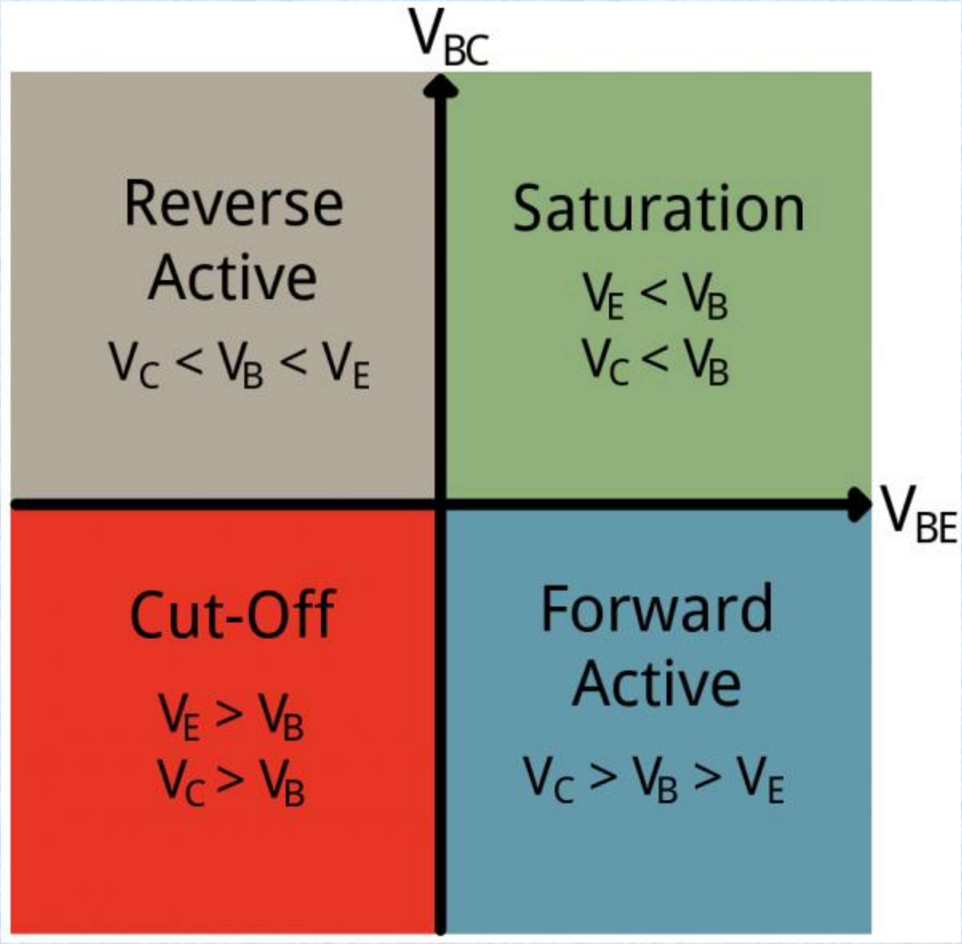
- Là phần tử 3 chân
- *Tạm thời* làm việc với dòng NPN

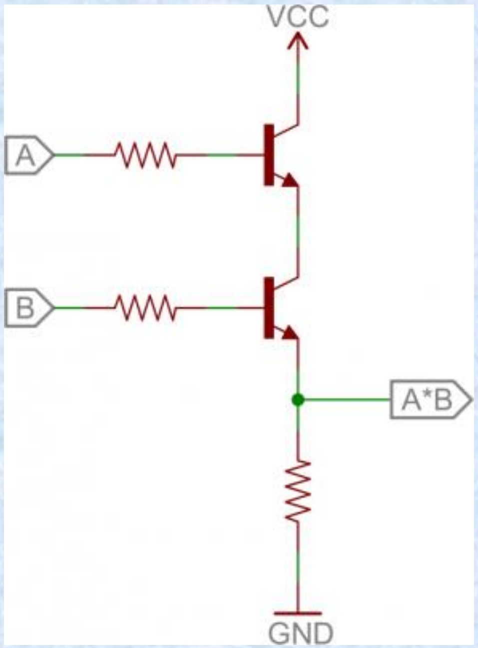
1.1. Các phần tử phi tuyến

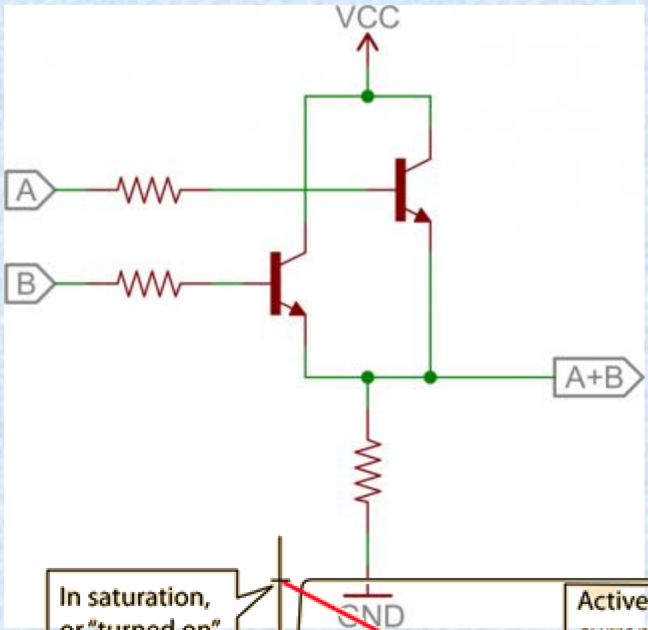
b.5. Transistor (2)

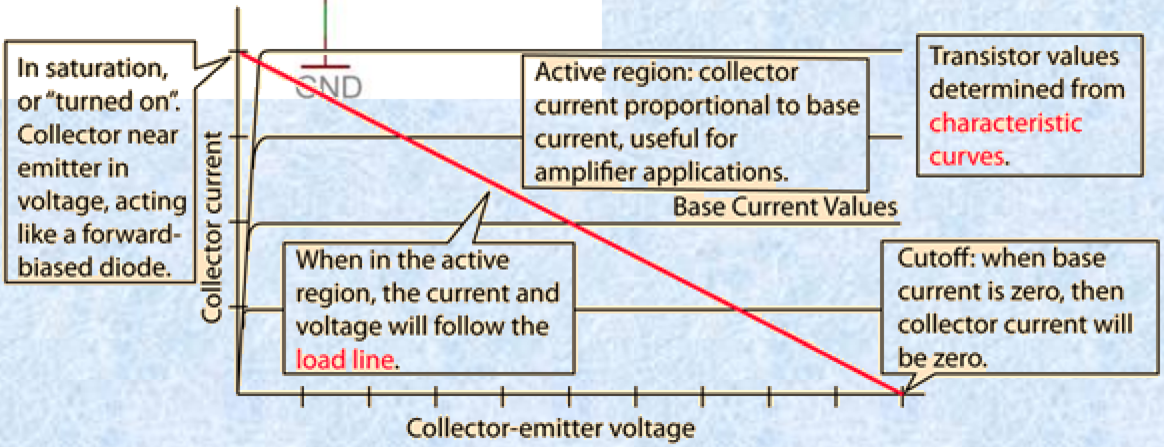


Dòng NPN



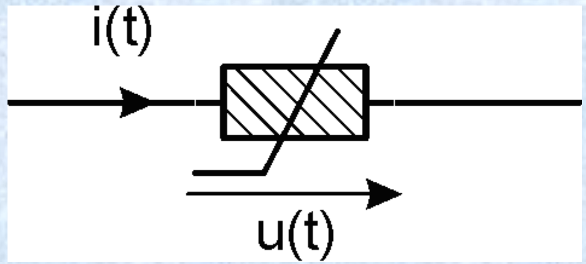

VCC
A
B
A*B
GND


VCC
A
B
A+B
GND


In saturation, or "turned on". Collector near emitter in voltage, acting like a forward-biased diode.
Active region: collector current proportional to base current, useful for amplifier applications.
Transistor values determined from characteristic curves.
Base Current Values
When in the active region, the current and voltage will follow the load line.
Cutoff: when base current is zero, then collector current will be zero.
Collector current
Collector-emitter voltage

1.1. Các phần tử phi tuyến

c. Công suất tiêu thụ trên các phần tử phi tuyến:



Công suất tiêu thụ tức thời: $$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Công suất phát tức thời: $$p_{\text{ph¸t}}(t) = -p(t)$$

Công suất tiêu thụ trung bình (trong một khoảng thời gian *T*):

$$p(t) \rightarrow P_{tb} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} p(t)dt$$

<u>Ghi chú:</u> *Xem lại nguyên tắc tính P_{tb} cho trường hợp tín hiệu có nhiều thành phần tần số!*

1.2. Mạch điện phi tuyến

Mạch điện tuyến tính:

Là mạch điện có *tất cả* các phần tử tải là phần tử tuyến tính (và các nguồn là các nguồn tuần hoàn)

Mạch điện phi tuyến:

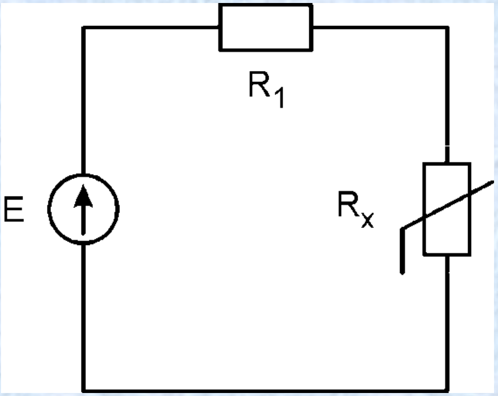
Là mạch điện *có ít nhất* một phần tử tải là phần tử phi tuyến (và các nguồn vẫn là các nguồn tuần hoàn)

hay nói cách khác:

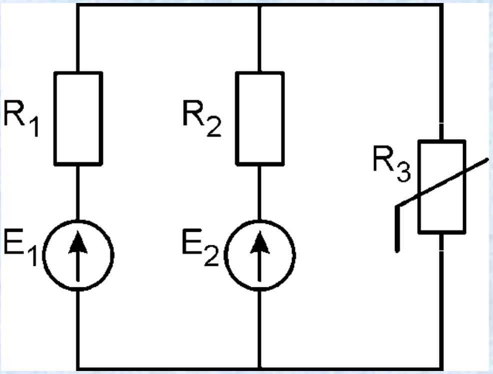
Chỉ cần 1 phần tử tải là phần tử phi tuyến thì toàn bộ mạch điện là mạch phi tuyến!!!

1.2. Mạch điện phi tuyến

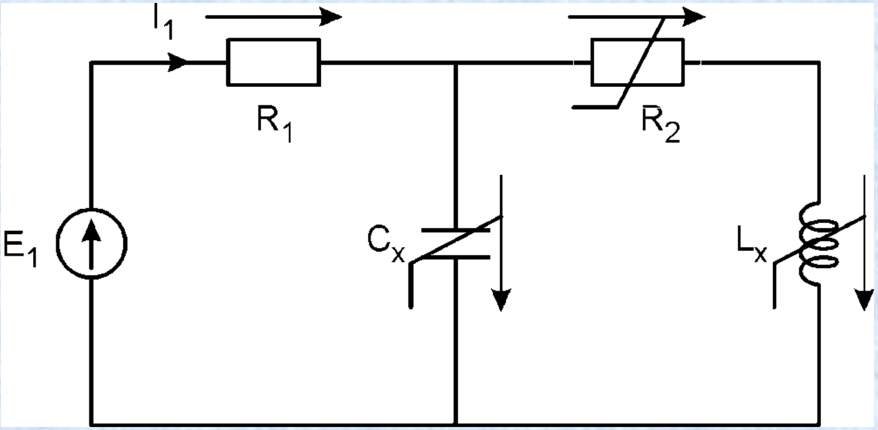
Một số mạch ví dụ:



(1)



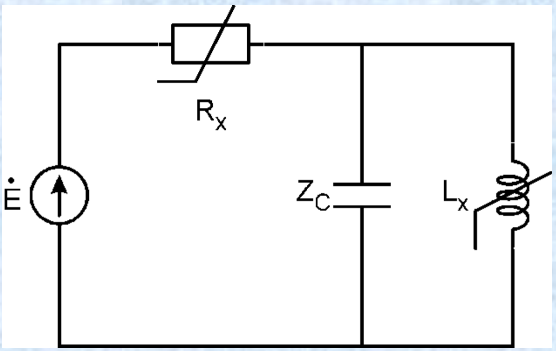
(2)



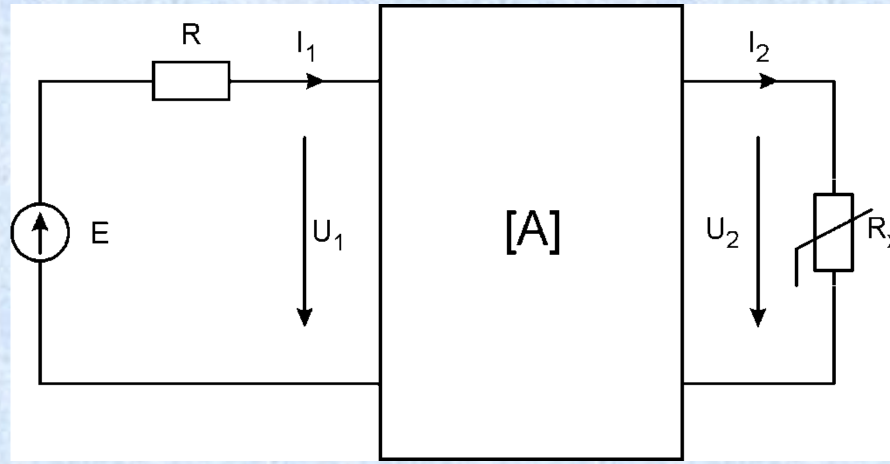
(3)

1.2. Mạch điện phi tuyến

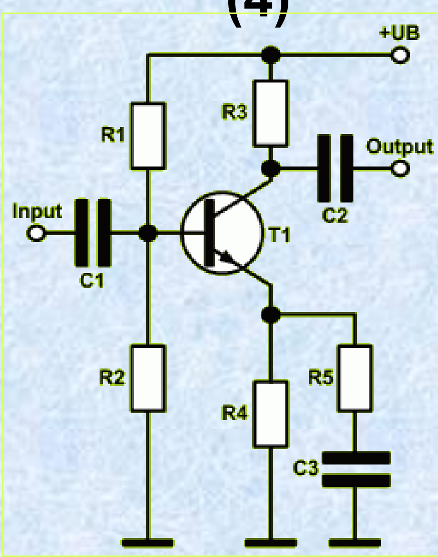
Một số ví dụ:



(4)



(5)



(...)

1.3. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến

a. Nhiệm vụ giải mạch điện phi tuyến:

Cho một mạch điện (cấu trúc mạch, giá trị các nguồn, giá trị hoặc đặc tính của các phần tử tải)

→ Tìm tất cả các tín hiệu u(t), i(t) trong mạch (từ đó tính các công suất p(t))

b. Phương pháp: Hai bước

1. Lập hệ phương trình (phi tuyến, vi-tích phân)
2. Giải hệ phương trình (phi tuyến, vi-tích phân)

1.3. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến

c. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến:

- Hai định luật K1 và K2 *trong miền thời gian* vẫn được thỏa mãn (như trong mạch tuyến tính).
- Các phương trình đặc trưng cho các phần tử tuyến tính vẫn được sử dụng như trước.

→ Các phương trình Kirchhoff được xây dựng theo các nguyên tắc tương tự như trong các mạch tuyến tính

→ Sử dụng phối hợp với các đặc tính của các phần tử ta có thể chuyển các phương trình K2 thành các phương trình theo dòng nhánh (hoặc theo các biến đặc trưng khác)

1.3. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến

c. Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến:

- Có thể lập hệ phương trình Kirchhoff theo các bước (mạch gồm các phần tử 1 cửa):
  - Xác định số phương trình cần lập (bằng số dòng nhánh ẩn của mạch)
  - Xác định số phương trình K1 (bằng số nút bậc ≥3 trừ đi 1)
  - Xác định số phương trình K2 (bằng số phương trình cần lập trừ đi số phương trình K1)
  - Lập các phương trình K1 (cho các nút bậc ≥3)
  - Lập các phương trình K2 (cho các vòng không chứa nhánh nguồn dòng)

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến đại số

- Phương pháp đồ thị:

  Tìm giao điểm của các đồ thị

- Phương pháp lặp:

  Giải hệ phương trình dạng **x**=f(**x**)

- Phương pháp dây cung:

  Giải hệ phương trình dạng f(**x**)=0

- …

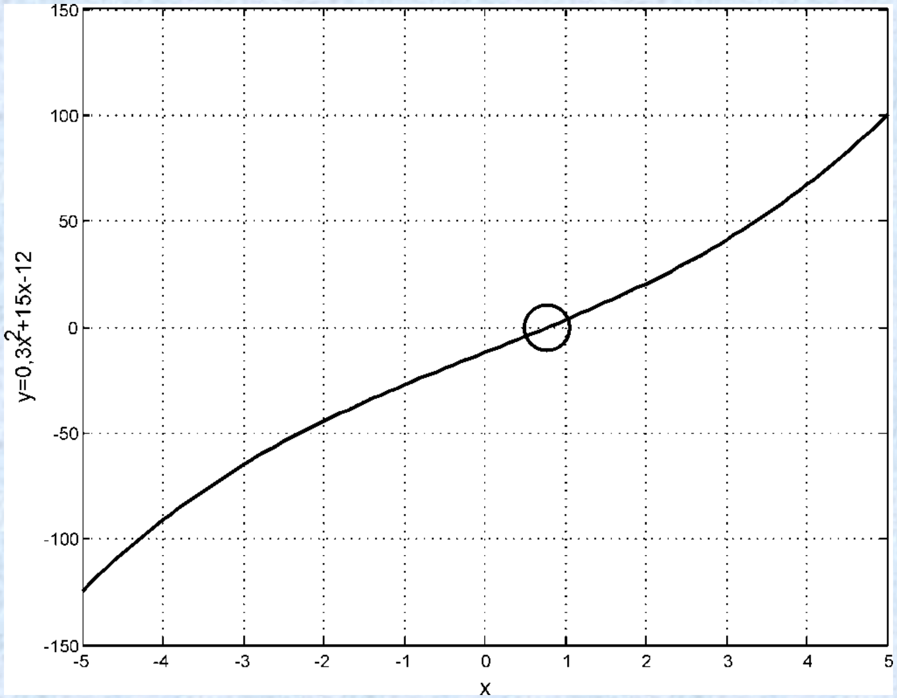
1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

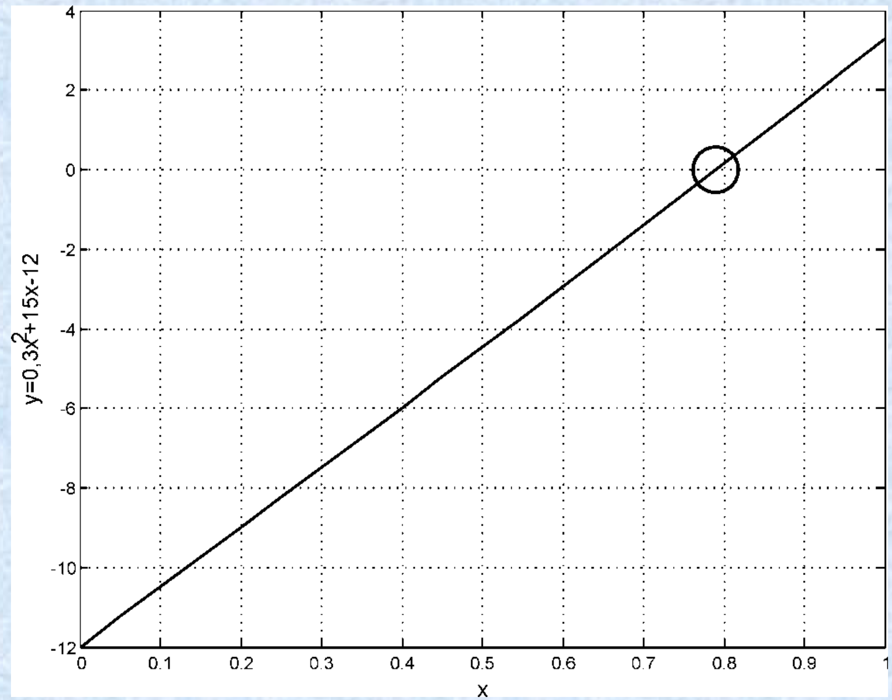
- Phương pháp đồ thị: Tìm giao điểm của các đồ thị

(Chú ý: độ chính xác không cao, thường dùng để định hướng hoặc xác định sơ bộ các điểm ban đầu cho các phương pháp tính chính xác hơn)

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

Tìm nghiệm của hàm $f(x)=0,3x^3+15x-12=0$





Nghiệm tìm được: $x \approx 0,8$

__Bài tập:__ *Vẽ và tìm các giao điểm cho trường hợp hệ nhiều ẩn.*

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

- Phương pháp lặp: Giải hệ phương trình dạng **x**=f(**x**)

1. Xuất phát từ điểm ban đầu $\mathbf{x}_0$ bất kỳ
2. Xác định điểm ước lượng tiếp theo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k), k \geq 0$$

1. Lặp lại cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng:

$$\left\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right\| < \varepsilon$$

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

- Phương pháp lặp: Ví dụ minh họa

$$0,3I^3+15I-12=0 \rightarrow I=\frac{12}{15}-\frac{0,3}{15}I^3=0,8-0,02I^3$$

Xuất phát từ giá trị ban đầu nào đó: $I^{(0)}=0$

$$I^{(0)}=0 \rightarrow I^{(1)}=f\left(I^{(0)}\right)=0,8$$

$$\rightarrow I^{(2)}=f\left(I^{(1)}\right)=0,8-0,02\cdot 0,8^3=0,790$$

$$\rightarrow I^{(3)}=f\left(I^{(2)}\right)=0,8-0,02\cdot 0,79^3=0,79=I^{(2)}$$

Kiểm tra lại nghiệm:

$$0,3I^3+15I-12=0,3\cdot 0,79^3+15\cdot 0,79-12=-0,0021$$

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

- Phương pháp lặp: Ví dụ minh họa *(hệ phương trình nhiều ẩn)*

$$\begin{cases} 12x + 0,3x^3 + 2xy - 15 & = & 0 \\ 15y + 0,2\sin(y) + 2x^2y - 20 & = & 0 \end{cases}$$

Biến đổi về dạng chuẩn:

$$\begin{cases} x & = & -\dfrac{0.3}{12}x^3 - \dfrac{2}{12}xy + \dfrac{15}{12} \\ y & = & -\dfrac{0,2}{15}\sin(y) - \dfrac{2}{15}x^2y + \dfrac{20}{15} \end{cases}$$

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

Xuất phát từ giá trị ban đầu nào đó:

$$\left(x^{(0)}; y^{(0)}\right) = (0;0)$$

Tiến hành các bước tính toán:

$$\left(x^{(0)}; y^{(0)}\right) = (0;0) \rightarrow \left(x^{(1)}; y^{(1)}\right) = (1,25;1,333)$$

$$\rightarrow \left(x^{(2)}; y^{(2)}\right) = (0,923;1,043) \rightarrow \left(x^{(3)}; y^{(3)}\right) = (1,073;1,203)$$

$$\rightarrow \ldots \rightarrow \left(x^{(10)}; y^{(10)}\right) = (1,025;1,159)$$

Kiểm tra lại nghiệm:

$$\begin{cases} 12x + 0,3x^3 + 2xy - 15 & = & -9,828.10^{-4} \\ 15y + 0,2\sin(y) + 2x^2 y - 20 & = & 3,629.10^{-3} \end{cases}$$

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

- Phương pháp dây cung: Giải phương trình dạng f(**x**)=0

1. Xuất phát từ hai điểm ban đầu $\mathbf{x}_0$ và $\mathbf{x}_1$ bất kỳ
2. Xác định điểm ước lượng tiếp theo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k-1})}\left(0 - f(\mathbf{x}_{k-1})\right) + \mathbf{x}_{k-1}, k \geq 1$$

3. Lặp lại cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng:

$$\left\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right\| < \varepsilon$$

1.4. Một số phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

- Phương pháp dây cung: Ví dụ minh họa

$$0,3I^3 + 15I - 12 = 0$$

Xuất phát từ hai giá trị ban đầu nào đó: $I^{(0)} = 0; I^{(1)} = 1;$

$$I^{(0)} = 0 \rightarrow f^{(0)} = -12;$$

$$I^{(1)} = 1 \rightarrow f^{(1)} = 3,3;$$

$$\rightarrow I^{(2)} = \frac{I^{(1)} - I^{(0)}}{f^{(1)} - f^{(0)}}\left(0 - f^{(0)}\right) + I^{(0)} = 0,784 \rightarrow f^{(2)} = -0,0954$$

$$\rightarrow I^{(3)} = \frac{I^{(2)} - I^{(1)}}{f^{(2)} - f^{(1)}}\left(0 - f^{(1)}\right) + I^{(1)} = 0,79 \rightarrow f^{(3)} = -2,088.10^{-3}$$

Kiểm tra lại nghiệm:

$$0,3I^3 + 15I - 12 = 0,3 \cdot 0,79^3 + 15 \cdot 0,79 - 12 = -0,0021$$

1.5. Một số bài toán cơ bản trong mạch phi tuyến

- Mạch xác lập với nguồn DC: chế độ hằng
- Mạch xác lập với nguồn AC: chế độ dừng
- Mạch xác lập với nguồn DC+AC:
- Mạch ở chế độ quá độ:

Chương II: Mạch phi tuyến ở chế độ hằng

2.1. Các hiện tượng cơ bản

2.2. Hệ phương trình phi tuyến của mạch điện

2.3. Phương pháp đồ thị, lặp và dây cung

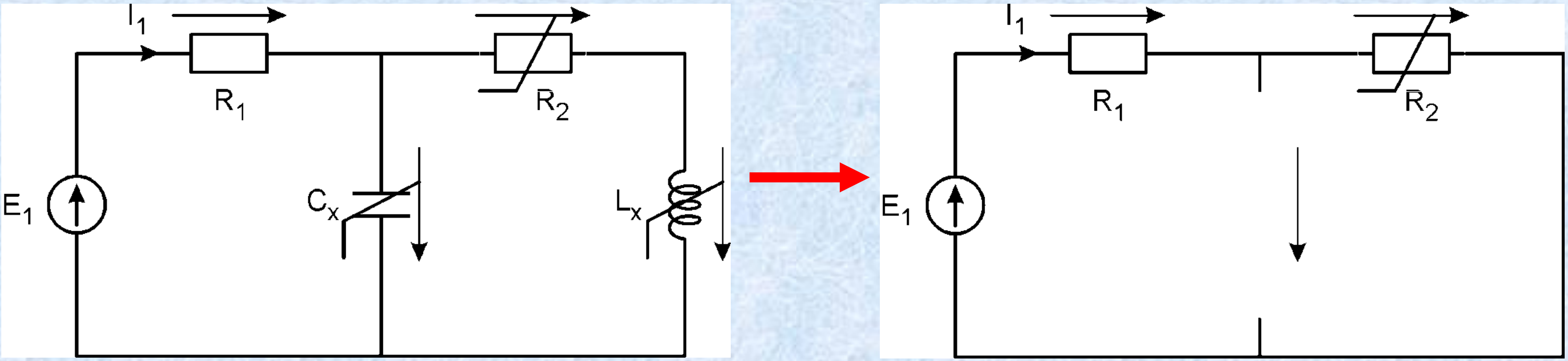
2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

2.1. Các hiện tượng cơ bản

- Ở chế độ hằng, các tín hiệu (u(t) và i(t)) trong mạch điện đều là hằng số (DC)
- Các phần tử cuộn dây và tụ điện (tuyến tính và phi tuyến) đều suy biến:
  - $u_L(t) = \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{d\psi}{di} \cdot \dfrac{di}{dt} = 0$: cuộn dây suy biến → dây dẫn (R=0), có điện áp = 0 (chú ý dòng điện có thể khác 0)
  - $i_C(t) = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dq}{du} \cdot \dfrac{du}{dt} = 0$: tụ điện suy biến → hở mạch (R=∞), có dòng điện = 0 (chú ý điện áp có thể khác 0)
- Do đó ta chỉ cần giải mạch điện ***thuần trở***

2.1. Các hiện tượng cơ bản

- Do đó ta chỉ cần giải mạch điện *thuần trở*



$$i_{Lx}(t) = I_{Lx} = I_{R2}$$

$$u_{Cx}(t) = U_{Cx} = U_{R2} \left(= -U_{R1} + E_1 \right)$$

2.2. Hệ phương trình phi tuyến của mạch điện

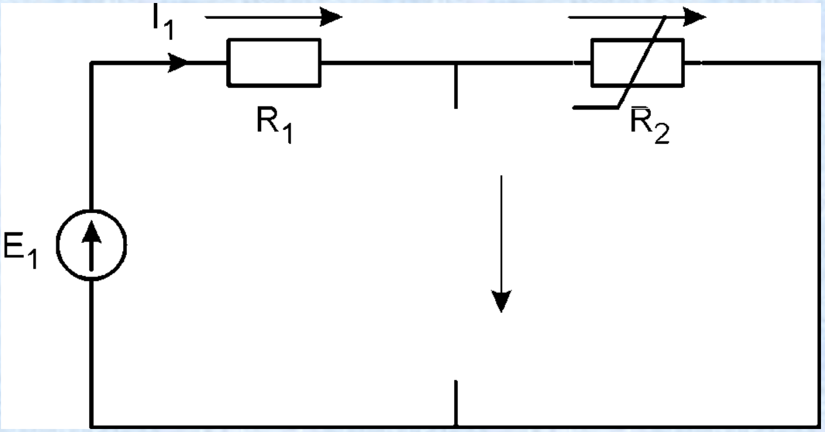
Khi có mạch điện thuần trở, tương tự như trường hợp mạch tuyến tính, ta sẽ có hệ phương trình của mạch điện ở dạng *đại số* (không có các toán tử đạo hàm hay tích phân)

2.3. Phương pháp lặp, dây cung và đồ thị

Xét lại ví dụ trước với

E_1=15V, R_1=10Ω, điện trở R_2

có đặc tính: $u = 7i + 0,5i^3$



Phương trình K_2 của mạch:

$$U_{R1} + U_{R2} - E_1 = 0$$

Sử dụng các phương trình đặc trưng:

$$10I_1 + \left(7I_1 + 0,5I_1^3\right) - 15 = 0$$

Giải theo phương pháp lặp: Ví dụ $I_1^{(0)} = 0 \rightarrow \ldots$

Giải theo phương pháp dây cung: Ví dụ $I_1^{(0)} = 0, I_1^{(1)} = 1 \rightarrow \ldots$

Giải theo phương pháp đồ thị:

2.3. Phương pháp lặp, dây cung và đồ thị

Nhược điểm của các phương pháp:

- Phức tạp khi mạch có nhiều nhánh – nút
- Độ chính xác của phương pháp đồ thị thấp
- Khi đặc tính cho theo bảng hoặc đồ thị thì khó xây dựng được hệ phương trình với các hệ số xác định rõ.

<u>Câu hỏi:</u> Trường hợp phương trình có nhiều nghiệm thì chọn nghiệm nào?

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

a. Ý tưởng của phương pháp: Là phương pháp cơ bản và hiệu quả trong giải mạch phi tuyến ở chế độ hằng.

Ý nghĩa của cụm từ “Dò ngược”

Bài toán “thuận”: Cho cấu trúc mạch, cho giá trị các phần tử tải và nguồn. Cần tìm các tín hiệu u-i (và p)

Bài toán “ngược”: Cho cấu trúc mạch, cho các giá trị phần tử tải và giá trị đặt trước nào đó của tín hiệu u-i. Tìm giá trị các nguồn để có được các tín hiệu u-i đó

Bài toán “ngược” thực hiện nhanh hơn bài toán “thuận”.

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Quá trình "dò": Thực hiện nhiều lần bài toán "ngược" với các giá trị u-i đặt trước khác nhau để tìm được trường hợp có nguồn đáp ứng trùng với nguồn đã cho. Khi đó giá trị u-i đang xét sẽ là nghiệm của bài toán "thuận".

Chú ý: Trường hợp mạch có nhiều nguồn, ta có thể đơn giản quá trình dò bằng cách chỉ cho giá trị 1 nguồn nào đó biến thiên còn các nguồn khác giữ giá trị cố định đã cho ban đầu.

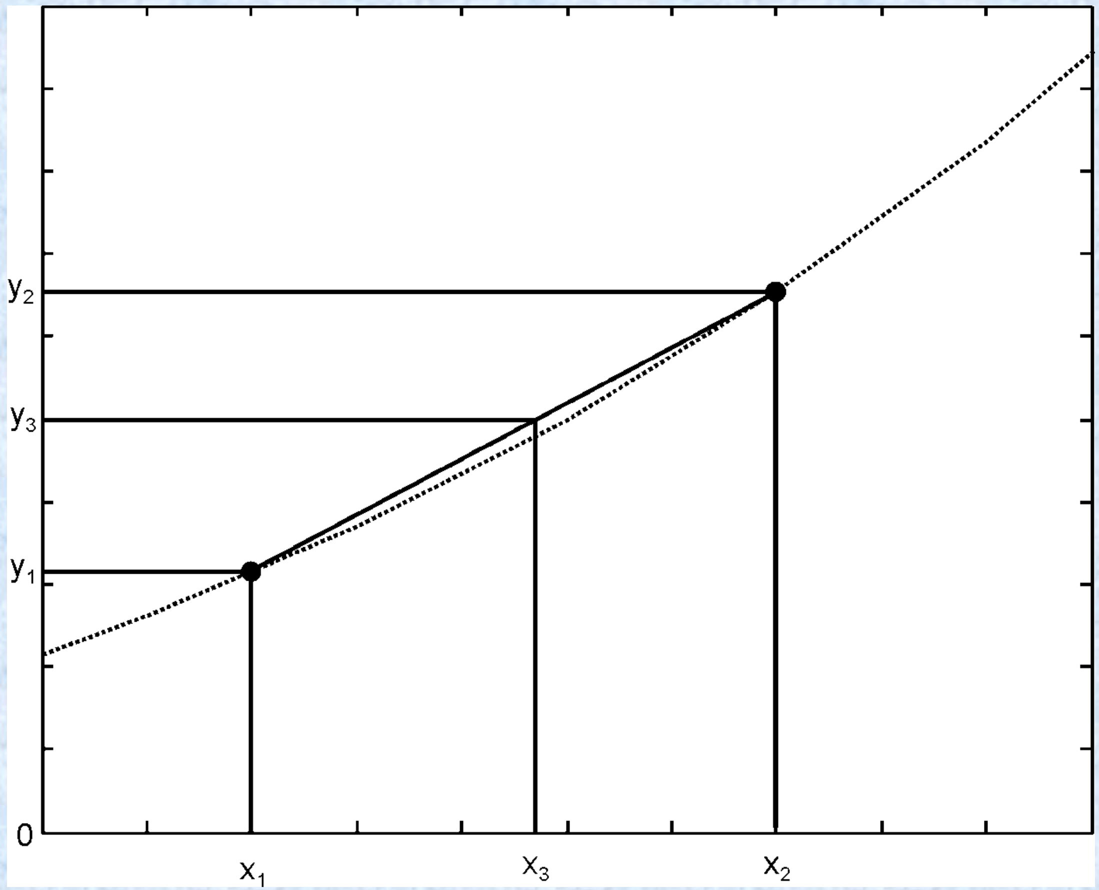
2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

b. Công thức nội suy tuyến tính và ứng dụng trong ước lượng các điểm dò

Cho trước 2 điểm của đặc tính là (x_1,y_1) và (x_2,y_2). Hãy ước lượng tọa độ của điểm thứ 3.

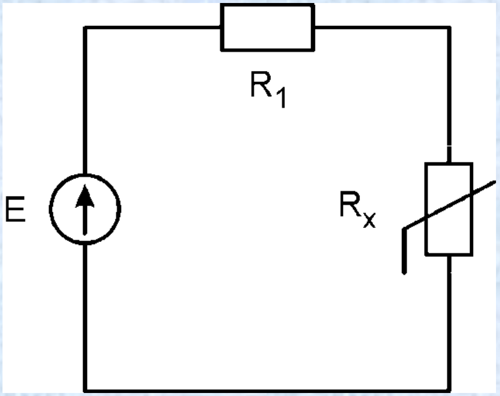
$$x_3 \approx \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(y_3 - y_1\right) + x_1$$

$$y_3 \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x_3 - x_1\right) + y_1$$



2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch đơn giản 1 vòng (ví dụ cơ bản dùng nội suy)



Mạch điện có E=15V, R_1=10Ω. Điện trở phi tuyến R_x có đặc tính:

a) Cho theo hàm u-i $u = 7i + 0,5i^3$

b) Cho theo hàm i-u $i = 0,1u + 0,001u^3$

c) Cho theo bảng

U(V)	**0**	**4,5**	**12**	**20**
I(A)	**0**	**1**	**2**	**3**

d) Cho theo đồ thị

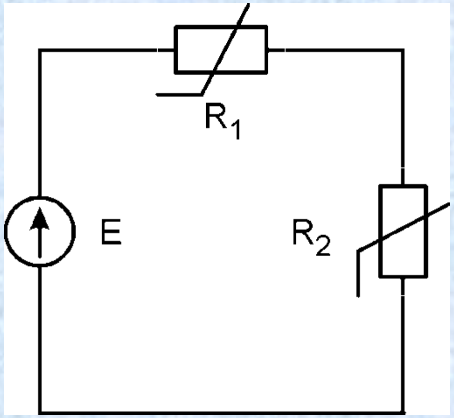
Chu trình dò:

<u>Bài tập:</u> *Giải lại với các dạng đặc tính khác!*

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch đơn giản 1 vòng (ví dụ cơ bản dùng nội suy)

Mạch điện có E=15V, hai điện trở phi tuyến R_1 và R_2 có đặc tính:



a) Cho theo hàm u-i $u = 7i + 0,5i^3$

b) Cho theo hàm i-u $i = 0,1u + 0,001u^3$

c) Cho theo bảng

U(V)	0	5	12	20
I(A)	0	1	2	3

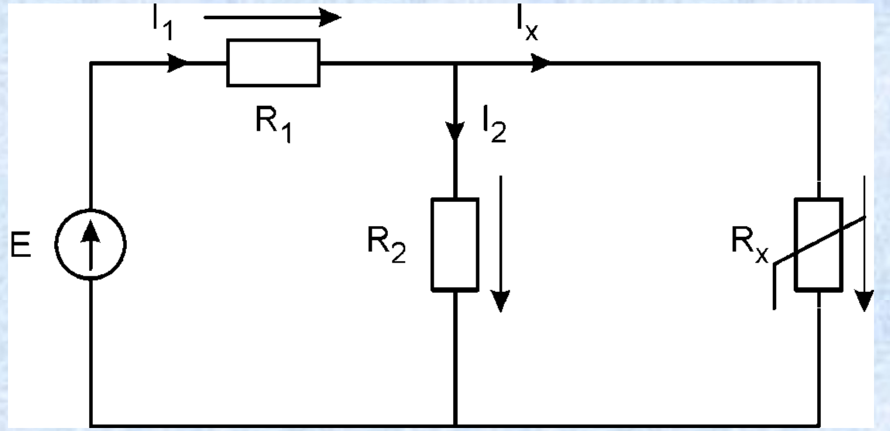
d) Cho theo đồ thị

Chu trình dò:

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch 2 vòng – 3 nhánh

Mạch điện có E=15V, R_1=10Ω, R_2=15Ω.



Điện trở phi tuyến R_x có đặc tính:

a) Cho theo hàm u-i $u = 7i + 0,5i^3$

b) Cho theo hàm i-u $i = 0,1u + 0,001u^3$

c) Cho theo bảng

U(V)	0	5	12	20
I(A)	0	1	2	3

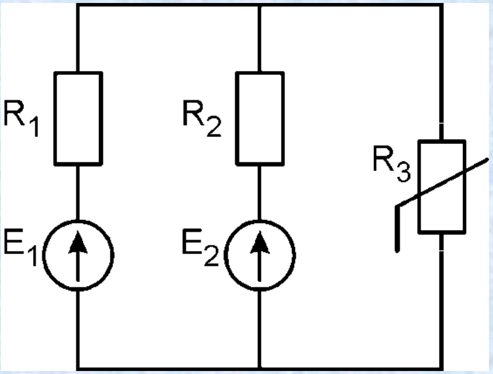
d) Cho theo đồ thị

Chu trình dò:

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch 2 vòng – 3 nhánh – 2 nguồn

Trường hợp mạch có nhiều nguồn, thay gì dò nhiều giá trị đồng thời, để đơn giản quá trình tìm kiếm ta có thể sử dụng ý tưởng "*Chỉ dò giá trị một nguồn, giá trị các nguồn khác giữ nguyên như đã cho ban đầu*"



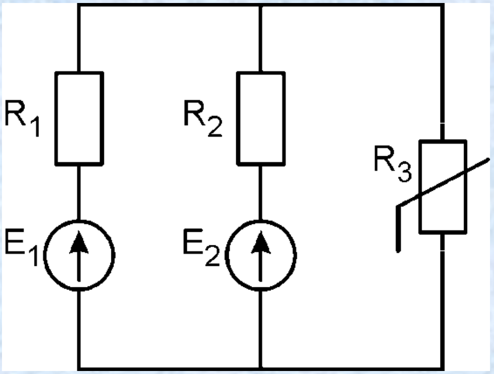
2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch 2 vòng – 3 nhánh – 2 nguồn

Mạch điện có E_1=15V, R_1=10Ω,

E_2=12V, R_2=15Ω.

Điện trở phi tuyến R_3 có đặc tính:



a) Cho theo hàm u-i $u = 7i + 0{,}5i^3$

b) Cho theo hàm i-u $i = 0{,}1u + 0{,}001u^3$

c) Cho theo bảng

U(V)	0	5	12	20
I(A)	0	1	2	3

d) Cho theo đồ thị

Bài tập: Thay nhánh 2 bằng nguồn dòng J_2.

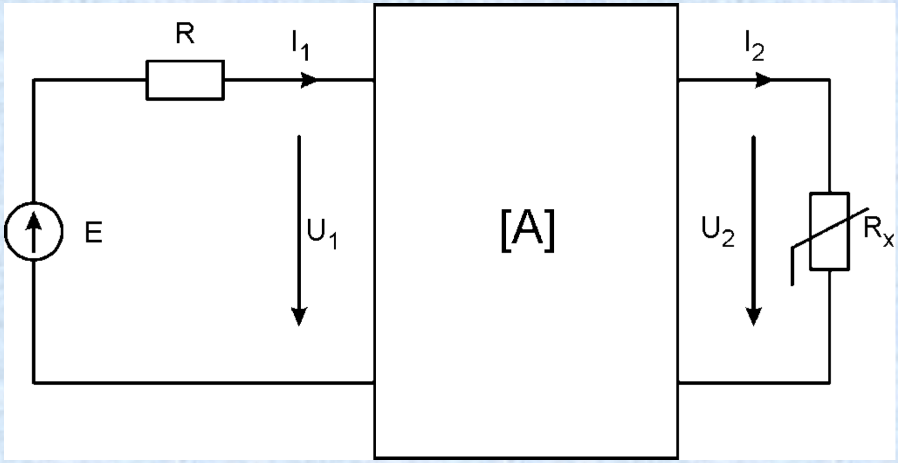
2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch có mạng hai cửa chữ A

Mạch điện có E =15V, R =10Ω.

Mạng hai cửa có ma trận A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 0{,}1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$



Điện trở phi tuyến R_x có đặc tính …

<u>Bài tập:</u> Giải bằng các phương pháp khác (biến đổi tương đương mạng hai cửa về mạng chữ T, Π,…)

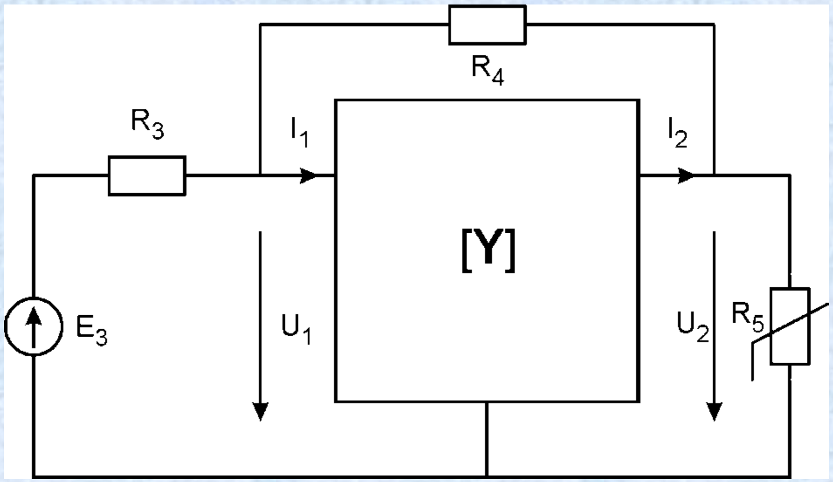
2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch có mạng hai cửa chữ Y – tải cổng ra

Mạch điện có E_3 =15V, R_3 =10Ω,

R_4=5Ω. Mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ 0,1 & -0,15 \end{bmatrix}$$



Điện trở phi tuyến R_5 có đặc tính…

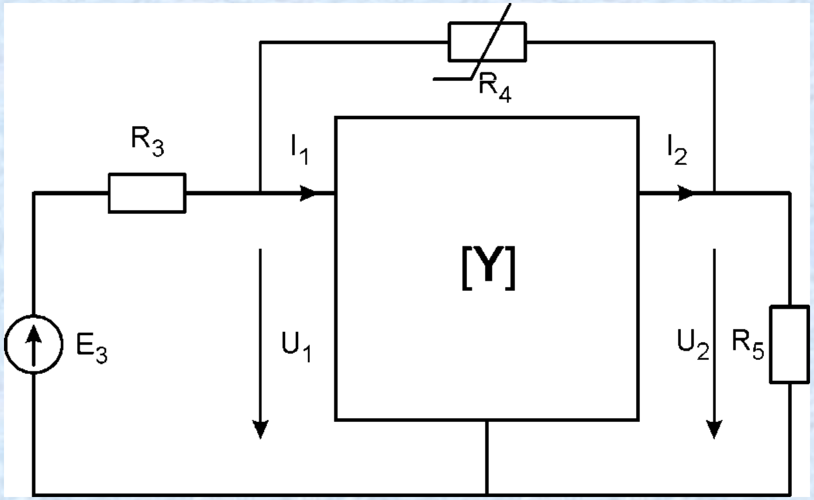
Bài tập: Giải bằng các phương pháp khác (biến đổi tương đương mạng hai cửa về mạng chữ T, Π,…)

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ mạch có mạng hai cửa chữ Y – tải kênh phản hồi

Mạch điện có E_3 =15V, R_3 =10Ω, R_5=5Ω. Mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ 0,1 & -0,15 \end{bmatrix}$$



Điện trở phi tuyến R_4 có đặc tính…

Bài tập: 1. Xem xét các trường hợp cho theo mạng hai cửa với ma trận **Z**.

2. Giải bằng các phương pháp khác (biến đổi tương đương mạng hai cửa về mạng chữ T, Π,…)

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Ví dụ phối hợp biến đổi tương đương Thévenin – Norton

Mạch điện có E_1=15V, R_1=10Ω,

E_2=12V, R_2=15Ω.

Điện trở phi tuyến R_3 có đặc tính:

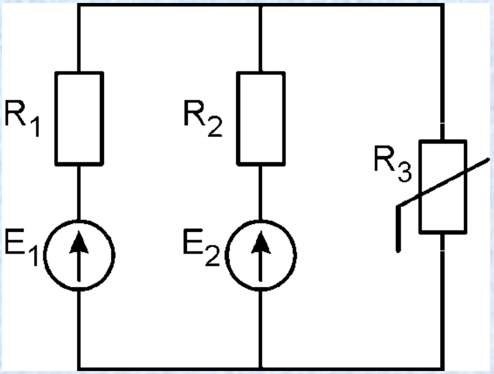
a) Cho theo hàm u-i $u = 7i + 0,5i^3$

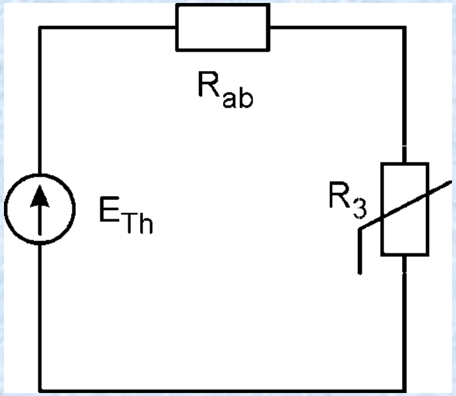
b) Cho theo hàm i-u $i = 0,1u + 0,001u^3$

c) Cho theo bảng

U(V)	0	5	12	20
I(A)	0	1	2	3

d) Cho theo đồ thị





2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

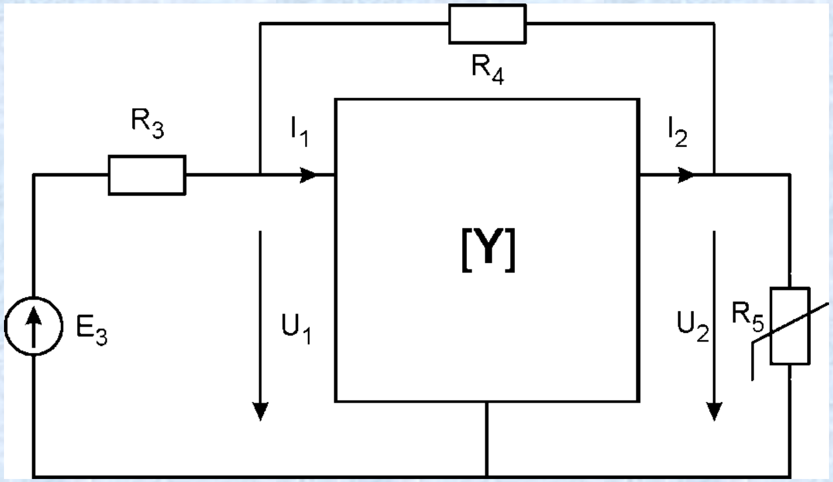
Ví dụ phối hợp biến đổi tương đương Thévenin – Norton

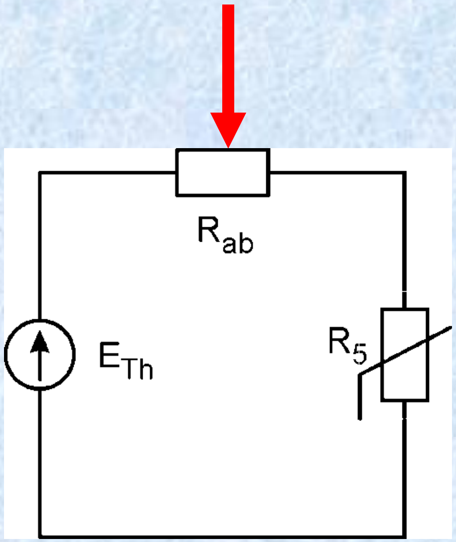
Mạch điện có E_3 =15V, R_3 =10Ω,

R_4=5Ω. Mạng hai cửa có ma trận:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ 0,1 & -0,15 \end{bmatrix}$$

Điện trở phi tuyến R_5 có đặc tính…

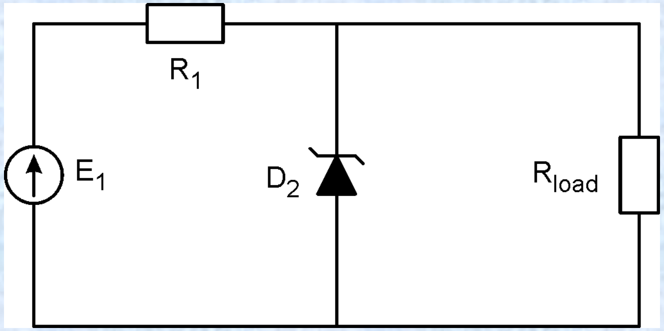


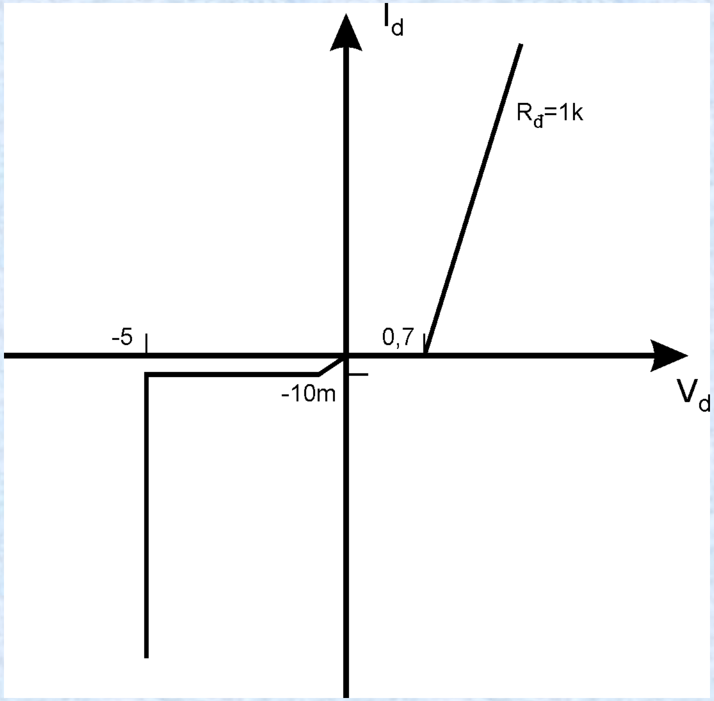


2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Mạch diode ở 2 chế độ (thuận / nghịch)

Mạch điện có E_1 =12V, R_1 =10Ω, R_{load}=5Ω. Diode có đặc tính như hình vẽ.





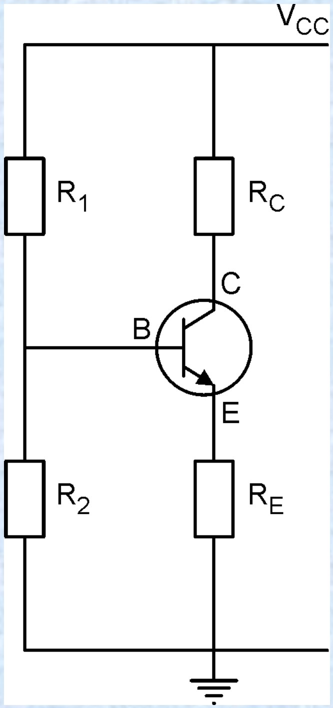
Bài tập: 1. Để điểm làm việc của diode ổn định, dòng diode (theo chiều ngược) cần lớn hơn 100mA. Tìm các giới hạn của tải.

2. Giải mạch khi đảo cực đấu nối diode.

2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

Mạch đặt điểm làm việc DC cho transistor

Mạch điện có V_{CC} =15V, R_1 =10kΩ, R_2 =5kΩ, R_{load}=5Ω. Transistor có đặc tính như hình vẽ.



2.4. Phương pháp dò ngược trên mạch

- Mạch trans npn ở chế độ bias
- 1. Giả thiết điểm làm việc (+ các điều kiện của điểm làm việc)
- 2. Giải mạch DC
- Kiểm tra điều kiện

Chương III: Mạch phi tuyến ở chế độ dừng

3.1. Các hiện tượng cơ bản

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

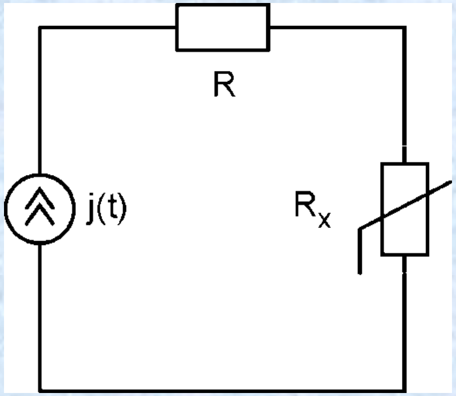
3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

3.1. Các hiện tượng cơ bản

Xét mạch ví dụ:

Dòng toàn mạch:

$$i(t) = j(t) = J_0 \sin(\omega t)$$



Điện áp trên các phần tử:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot J_0 \sin(\omega t)$$

$$u_x = ai + bi^3 = aJ_0 \sin(\omega t) + bJ_0^3 \sin^3(\omega t)$$

Sử dụng các công thức hạ bậc hàm lượng giác để rút gọn:

$$u_x(t) = aJ_0 \sin(\omega t) + bJ_0^3 \frac{3}{4} \sin(\omega t) - bJ_0^3 \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$$

$$= \left(aJ_0 + \frac{3}{4} bJ_0^3 \right) \sin(\omega t) - \frac{1}{4} bJ_0^3 \sin(3\omega t)$$

Điện áp trên nguồn dòng:

$$u_j(t) = u_R(t) + u_x(t) = \left((a+R) J_0 + \frac{3}{4} bJ_0^3 \right) \sin(\omega t) - \frac{1}{4} bJ_0^3 \sin(3\omega t)$$

3.1. Các hiện tượng cơ bản

- Các phần tử L và C không suy biến
- Trong mạch điện có hiện tượng *tạo tần* (tần số của tín hiệu u-i chứa thành phần tần số *khác* với tần số của nguồn) và *triệt tần* (tần số của tín hiệu u-i *không chứa* thành phần tần số của nguồn).

$$u_x(t) = aJ_0\sin(\omega t) + bJ_0^3\frac{3}{4}\sin(\omega t) - bJ_0^3\frac{1}{4}\sin(3\omega t)$$

$$= \left(aJ_0 + \frac{3}{4}bJ_0^3\right)\sin(\omega t) - \frac{1}{4}bJ_0^3\sin(3\omega t)$$

3.1. Các hiện tượng cơ bản

- Tuy nhiên các định luật K1 và K2 vẫn bảo toàn dạng:
    - Đối với nút (mạch kín) bất kỳ: $\sum i_{\text{vµo}}(t) = \sum i_{\text{ra}}(t)$
    - Đối với một vòng kín bất kỳ: $\sum u_{\text{thuËn}}(t) - \sum u_{\text{nghÞch}}(t) = 0$
- Nếu ta chỉ quan tâm đến bài toán *cân bằng công suất*:
    - Công suất phát của các nguồn: chỉ do thành phần u-i cùng với tần số nguồn sinh ra (Lý do?)

→ Chỉ quan tâm tới 1 tần số trong mạch (và chủ yếu cũng là tần số của nguồn)

3.1. Các hiện tượng cơ bản

- Khi chỉ quan tâm 1 thành phần tần số của các tín hiệu u-i:

  - Các định luật K1 và K2 vẫn bảo toàn dạng (Lý do?)

  - Đối với nút (mạch kín) bất kỳ:

$$\sum i_{\text{vµo}}^{\omega t}(t) = \sum i_{ra}^{\omega t}(t)$$

  - Đối với một vòng kín bất kỳ:

$$\sum u_{\text{thuËn}}^{\omega t}(t) - \sum u_{\text{nghÞch}}^{\omega t}(t) = 0$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ý tưởng của phương pháp: Ta chỉ quan tâm tới thành phần ωt của các tín hiệu u(t), i(t)

- Trong trường hợp tổng quát, một tín hiệu cần tìm sẽ có hai ẩn là tham số của hàm sin:
  - Ở dạng $A\sin(\omega t + \varphi)$: Tham số ***A*** và $\boldsymbol{\varphi}$
  - Ở dạng $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$: Tham số ***A*** và ***B***

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ý tưởng của phương pháp (2):

Chỉ xét các thành phần ωt và sử dụng các công thức biến đổi lượng giác phối hợp với hệ phương trình Kirchhoff để đưa hệ phương trình mạch về dạng

$$M\sin(\omega t) + N\cos(\omega t) = P\sin(\omega t) + Q\cos(\omega t)$$

hoặc

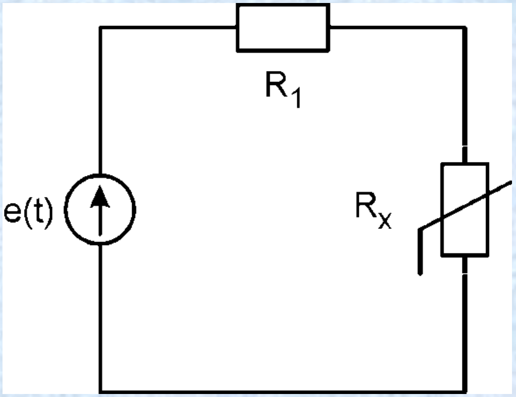
$$M\sin(\omega t + N) = P\sin(\omega t + Q)$$

→ Khi đó, sử dụng tính chất độc lập tuyến tính của các hàm sin() và cos() ta rút ra được hệ phương trình

$$\begin{cases} M = P \\ N = Q \end{cases}$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch thuần trở:



Giá trị các phần tử: $e(t) = 10\sin(t); R_1 = 5\Omega;$

$R_x : u = 5i + 0,5i^3$

Thành phần ωt của dòng toàn mạch (mạch thuần trở nên dòng và áp đồng pha):

$$i^{\omega t}(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \sin(t)$$

Điện áp trên các phần tử:

$$u_{R1}^{\omega t}(t) = R_1 \cdot i^{\omega t}(t) = 5I_0 \sin(t)$$

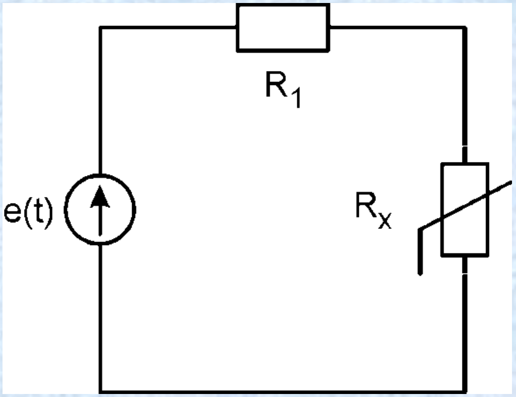
$$u_x^{\omega t}(t) = \left(ai^{\omega t} + b\left(i^{\omega t}\right)^3 \right)^{\omega t} = \left(5I_0 \sin(t) + 0,5I_0^3 \sin^3(t)\right)^{\omega t}$$

Sử dụng các công thức hạ bậc hàm lượng giác để rút gọn:

$$u_x^{\omega t}(t) = \left(5I_0 + 0,375I_0^3\right)\sin(t)$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch thuần trở:



Cân bằng thành phần ωt của các điện áp

trong phương trình K_2:

$$e^{\omega t}(t) = u_{R1}^{\omega t}(t) + u_x^{\omega t}(t)$$

$$10\sin(t) = \left(10I_0 + 0,375I_0^3\right)\sin(t)$$

$$\rightarrow 10 = 10I_0 + 0,375I_0^3$$

Giải phương trình bậc 3 (chỉ có một nghiệm thực): $I_0 = 0,966$

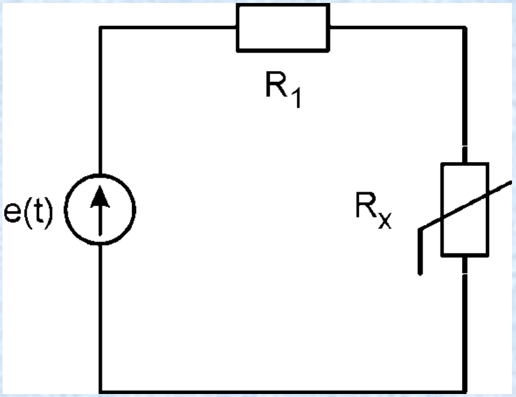
Biên độ điện áp trên các điện trở:

$$\left|U_{R1}\right| = 5I_0 = 4,83; \left|U_x\right| = 5I_0 + 0,375I_0^3 = 5,168;$$

<u>*Câu hỏi:*</u> Trường hợp phương trình có nhiều nghiệm thì chọn nghiệm nào?

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch thuần trở:



Công suất phát của nguồn e(t):

$$P_{e(t)} = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 4,83(W)$$

Công suất tiêu thụ của hai điện trở:

$$P_{R1} = \frac{4,83}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,966}{\sqrt{2}} \cdot \cos(0°) = 2,333(W)$$

$$P_x = \frac{5,168}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,966}{\sqrt{2}} \cdot \cos(0°) = 2,496(W)$$

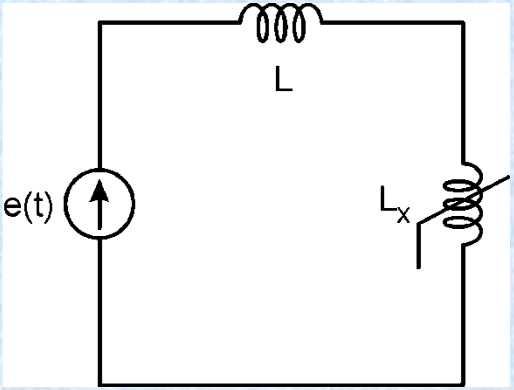
Tổng công suất tiêu thụ:

$$P_{t.thô} = P_{R1} + P_x = 4,829$$

<u>*Câu hỏi:*</u> Với các tần số phát sinh thì hiện tượng công suất như thế nào?

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch thuần cảm/dung:



$$e(t) = 10\sin(t); L = 1H;$$

$$L_x : \psi = 2i - 0,5i^3$$

Phương trình K2 của mạch:

$$e(t) = u_L(t) + u_{Lx}(t)$$

Đưa về theo biến đặc trưng i(t):

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + \frac{d\psi}{di}\frac{di}{dt}$$

$$10\sin(\omega t) = \frac{di}{dt} + \left(2 - 1,5i^2\right)\frac{di}{dt} = \left(3 - 1,5i^2\right)\frac{di}{dt}$$

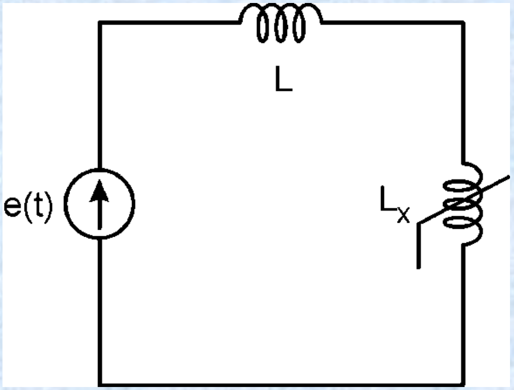
3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Chỉ xét thành phần ωt:

$$i^{\omega t}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Do mạch thuần cảm và nguồn chỉ có thành phần

sin(ωt) → A=0



Biến đổi phương trình K2 theo dạng nghiệm mới:

$$i^{\omega t}(t) = B\cos(\omega t) \rightarrow \frac{di}{dt} = -B\omega\sin(\omega t)$$

$$\left(2-1,5i^2\right)\frac{di}{dt} = \left[2-1,5B^2\left(1-\sin^2(\omega t)\right)\right]\left(-B\omega\sin(\omega t)\right)$$

$$= -\left(2-1,5B^2\right)B\omega\sin(\omega t) - 1,5B^3\omega\sin^3(\omega t)$$

$$= \left(1,5B^2-2\right)B\omega\sin(\omega t) - 1,5B^3\omega\left(\frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)\right)$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Chỉ xét thành phần ωt:

$$e(t) = u_L(t) + u_{Lx}(t) \rightarrow e^{\omega t}(t) = u_L^{\omega t}(t) + u_{Lx}^{\omega t}(t)$$

$$\rightarrow 10\sin(\omega t) = -B\omega\sin(\omega t) + (1,5B^2 - 2)B\omega\sin(\omega t) - \frac{4,5}{4}B^3\omega\sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\omega=1} 10\sin(t) = -B\sin(t) + (1,5B^2 - 2)B\sin(t) - \frac{4,5}{4}B^3\sin(t)$$

Triệt tiêu các sin(ωt):

$$10 = -B + (1,5B^2 - 2)B - \frac{4,5}{4}B^3$$

Rút gọn:

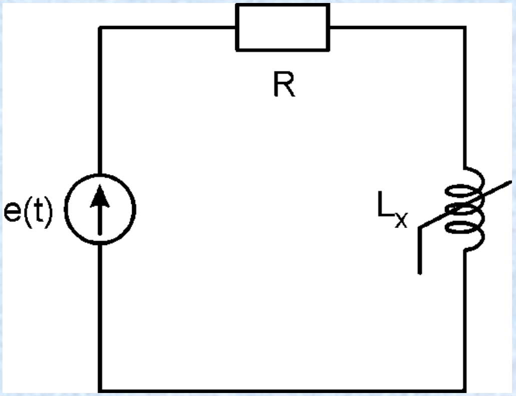
$$\frac{3}{8}B^3 - 3B - 10 = 0$$

$$\rightarrow B = 3,861$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch hỗn hợp:

$$e(t)=10\sin(5t); R=10\Omega;\ \ L_x:\psi=2i+0,5i^3$$



Phương trình K2 của mạch:

$$e(t)=u_R(t)+u_{Lx}(t)$$

Đưa về theo biến đặc trưng i(t):

$$e(t)=R\cdot i(t)+\frac{d\psi}{di}\frac{di}{dt}$$

$$10\sin(\omega t)=10\cdot i(t)+\left(2+1,5i^2\right)\frac{di}{dt}$$

Chỉ xét thành phần ωt: Do mạch có cả điện trở và điện cảm nên dòng *i* sẽ lệch pha với nguồn

$$i^{\omega t}(t)=I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Biến đổi phương trình K2 theo dạng nghiệm mới:

$$u_R^{\omega t}(t) = 10I_0\sin(\omega t + \varphi) = 10I_0\sin(5t + \varphi)$$

$$u_{Lx}^{\omega t}(t) = \left(2 + 1{,}5I_0^2\sin^2(\omega t + \varphi)\right)\omega I_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \left(2 + 1{,}5I_0^2\right)\omega I_0\cos(\omega t + \varphi) - 1{,}5\omega I_0^3\cos^3(\omega t + \varphi)$$

$$= \left(2 + 1{,}5I_0^2\right)\omega I_0\cos(\omega t + \varphi) - 1{,}5\omega I_0^3\left[\frac{3}{4}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t + 3\varphi)\right]$$

$$= \left(2 + 0{,}375I_0^2\right)\omega I_0\cos(\omega t + \varphi) - 0{,}375\omega I_0^3\cos(3\omega t + 3\varphi)$$

$$\overset{\omega=5}{=}\left(10 + 1{,}875I_0^2\right)I_0\cos(5t + \varphi) - 1{,}875I_0^3\cos(15t + 3\varphi)$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Chỉ xét thành phần ωt:

$$e(t) = u_R(t) + u_{Lx}(t) \rightarrow e^{\omega t}(t) = u_R^{\omega t}(t) + u_{Lx}^{\omega t}(t)$$

$$\rightarrow 10\sin(5t) = 10I_0 \sin(5t+\varphi) + \left[10I_0 + 1{,}875I_0^3\right]\cos(5t+\varphi)$$

Cân bằng biên độ hàm sin cả hai vế:

$$10 = \sqrt{100I_0^2 + \left(10I_0 + 1{,}875I_0^3\right)^2}$$

Đặt $I_0^2 = x \geq 0$

$$100 = x\left(100 + 100 + 37{,}5x + 3{,}5156x^2\right)$$

$$3{,}5156x^3 + 37{,}5x^2 + 200x - 100 = 0$$

$$\rightarrow x = 0{,}459$$

$$\rightarrow I_0 = 0{,}678$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Thế giá trị biên độ vừa tìm được vào phương trình cân bằng:

$$10\sin(5t) = 6,78\sin(5t+\varphi) + 7,364\cos(5t+\varphi)$$

Cân bằng pha cả hai vế:

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{7,364}{6,78}\right) = -47,36°$$

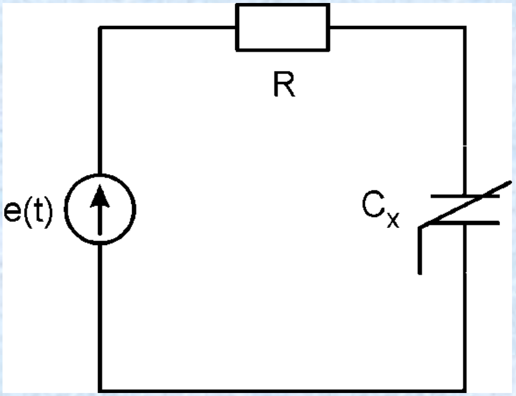
Tổng hợp kết quả:

$$i^{\omega t}(t) = 0,678\sin(5t - 47,36°)$$

<u>*Bài tập:*</u> Làm lại với dạng nghiệm $i^{\omega t}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Ví dụ mạch hỗn hợp:



$$e(t) = 10\sin(5t); R = 10\Omega;$$

$$C_x : q = 0,1u + 0,001u^3$$

Phương trình K2 của mạch:

$$e(t) = u_R(t) + u_{Cx}(t)$$

Đưa về theo biến đặc trưng u(t)=u_{Cx}(t) :

$$e(t) = R \cdot \frac{dq}{du}\frac{du}{dt} + u(t)$$

$$10\sin(\omega t) = 10 \cdot \left(0,1 + 0,003u^2\right)\frac{du}{dt} + u(t)$$

Chỉ xét thành phần ωt: Do mạch có cả điện trở và điện dung nên điện áp *u* sẽ lệch pha với nguồn: $u^{\omega t}(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Biến đổi phương trình K2 theo dạng nghiệm mới:

$$u^{\omega t}(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) = U_0 \sin(5t + \varphi)$$

$$u_R^{\omega t}(t) = 10\left(0,1 + 0,003U_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\right)\omega U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \left(1 + 0,03U_0^2\right)\omega U_0 \cos(\omega t + \varphi) - 0,03\omega U_0^3 \cos^3(\omega t + \varphi)$$

$$= \left(1 + 0,03U_0^2\right)\omega U_0 \cos(\omega t + \varphi) - 0,03\omega U_0^3 \left[\frac{3}{4}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t + 3\varphi)\right]$$

$$= \left(1 + 0,0075U_0^2\right)\omega U_0 \cos(\omega t + \varphi) - 0,0075U_0^3 \omega \cos(3\omega t + 3\varphi)$$

$$\overset{\omega=5}{=} \left(5 + 0,0375U_0^2\right)U_0 \cos(5t + \varphi) - 0,0375U_0^3 \cos(15t + 3\varphi)$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Chỉ xét thành phần ωt:

$$e(t) = u_R(t) + u_{Cx}(t) \rightarrow e^{\omega t}(t) = u_R^{\omega t}(t) + u_{Cx}^{\omega t}(t)$$

$$\rightarrow 10\sin(5t) = \left(5 + 0,0375U_0^2\right)U_0\cos(5t+\varphi) + U_0\sin(5t+\varphi)$$

Cân bằng biên độ hàm sin cả hai vế:

$$10 = \sqrt{\left(5U_0 + 0,0375U_0^3\right)^2 + U_0^2}$$

Đặt $U_0^2 = x \geq 0$

$$100 = x\left(1 + 25 + 0,375x + 1,406.10^{-3}x^2\right)$$

$$1,406.10^{-3}x^3 + 0,375x^2 + 26x - 100 = 0$$

$$\rightarrow x = 3,651$$

$$\rightarrow U_0 = 1,911$$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Thế giá trị biên độ vừa tìm được vào phương trình cân bằng:

$$10\sin(5t) = 9,817\cos(5t+\varphi) + 1,911\sin(5t+\varphi)$$

Cân bằng pha cả hai vế:

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{9,817}{1,911}\right) = -78,98^\circ$$

Tổng hợp kết quả:

$$u^{\omega t}(t) = 1,911\sin(5t - 78,98^\circ)$$

<u>Bài tập:</u> Làm lại với dạng nghiệm $u^{\omega t}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

3.2. Phương pháp cân bằng điều hòa

Nhược điểm của phương pháp cân bằng điều hòa:

- Hệ phương trình yêu cầu biến đổi các hàm lượng giác phức tạp
- Với mạch nhiều nhánh thì việc tính toán sẽ trở nên phức tạp hơn rất nhiều
- …

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Ý tưởng của phương pháp: *Tương tự như phương pháp cân bằng điều hòa, khi ta chỉ xét thành phần tần số ωt của các tín hiệu u-i trong các phương trình Kirchhoff thì ta có thể lấy ảnh phức của cả hai vế-> Theo tính chất tuyến tính của phép biến đổi ảnh phức, ta sẽ có các phương trình Kirchhoff vẫn bảo toàn dạng.*

$$\sum i_{\text{vµo}}^{\omega t}(t) = \sum i_{ra}^{\omega t}(t) \quad \rightarrow \quad \sum \dot{I}_{\text{vµo}}^{\omega t} = \sum \dot{I}_{ra}^{\omega t}$$

$$\sum u_{\text{thuËn}}^{\omega t}(t) - \sum u_{\text{nghÞch}}^{\omega t}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum \dot{U}_{\text{thuËn}}^{\omega t} - \sum \dot{U}_{\text{nghÞch}}^{\omega t} = 0$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Nhắc lại một số kết quả đã tính toán với các phần tử phi tuyến:

$R_x : u = 5i + 0,5i^3$

$$i^{\omega t}(t) \overset{\omega=1}{=} I_0 \sin(t) \to u_x^{\omega t}(t) = \left(5I_0 + 0,375I_0^3\right)\sin(t)$$

$$\to \left|\dot{U}^{\omega t}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5I_0 + 0,375I_0^3\right) = 5\left|\dot{I}^{\omega t}\right| + 0,75\left|\dot{I}^{\omega t}\right|^3$$

$L_x : \psi = 2i - 0,5i^3 \quad i^{\omega t}(t) = B\cos(t) \to u^{\omega t}(t) = \left(1,5B^3 - 2B\right)\sin(t)$

$$\to \left|\dot{U}^{\omega t}\right| = f\left(\left|\dot{I}^{\omega t}\right|\right) = \ldots$$

$C_x : q = 0,1u + 0,001u^3$

$$u^{\omega t}(t) \overset{\omega=5}{=} U_0 \sin(5t + \varphi) \to i^{\omega t}(t) = \left(0,5U_0 + 0,00375U_0^3\right)\cos(5t + \varphi)$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Nhắc lại một số kết quả đã tính toán với các phần tử phi tuyến:

$$R_x : u = 5i + 0,5i^3$$

$$i^{\omega t}(t) \overset{\omega=1}{=} I_0 \sin(t) \rightarrow u_x^{\omega t}(t) = \left(5I_0 + 0,375 I_0^3\right)\sin(t)$$

$$\rightarrow \left|\dot{U}^{\omega t}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5I_0 + 0,375 I_0^3\right) = 5\left|\dot{I}^{\omega t}\right| + 0,75\left|\dot{I}^{\omega t}\right|^3$$

$$L_x : \psi = 2i - 0,5i^3 \qquad i^{\omega t}(t) = B\cos(t) \rightarrow u^{\omega t}(t) = \left(1,5B^3 - 2B\right)\sin(t)$$

$$\rightarrow \left|\dot{U}^{\omega t}\right| = f\left(\left|\dot{I}^{\omega t}\right|\right) = \ldots$$

$$C_x : q = 0,1u + 0,001u^3$$

$$u^{\omega t}(t) \overset{\omega=5}{=} U_0 \sin(5t + \varphi) \rightarrow i^{\omega t}(t) = \left(0,5U_0 + 0,00375 U_0^3\right)\cos(5t + \varphi)$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Ý tưởng của phương pháp (2): *Từ các ví dụ trên ta có thể tổng quát hóa lên đối với các phần tử phi tuyến:*

- *Quan hệ giữa các biên độ của ảnh phức U-I (hoặc giá trị hiệu dụng) là quan hệ phi tuyến*
- *Quan hệ giữa pha của U-I tương tự như với trường hợp tuyến tính. Cụ thể:*
  - *Đối với điện trở phi tuyến: ảnh phức điện áp đồng pha với ảnh phức dòng điện.*
  - *Đối với cuộn dây phi tuyến: ảnh phức điện áp có pha lớn hơn pha của ảnh phức dòng điện là 90^o.*
  - *Đối với tụ điện phi tuyến: ảnh phức điện áp có pha bé hơn pha của ảnh phức dòng điện là 90^o.*

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Ý tưởng của phương pháp(3):

- *Vẫn tiếp tục sử dụng ý tưởng của phương pháp dò ngược*
- *Các khác biệt so với trường hợp dò ngược trên mạch DC:*
  - *Các tính toán được thực hiện trên ảnh phức của tín hiệu.*
  - *Quan hệ giữa dòng vào áp trên các phần tử bao gồm quan hệ hiệu dụng (hoặc biên độ) và quan hệ pha*
  - *Để giảm bớt độ phức tạp thường ta dò **biên độ** của nguồn trước, xác định **pha** của nguồn sau.*

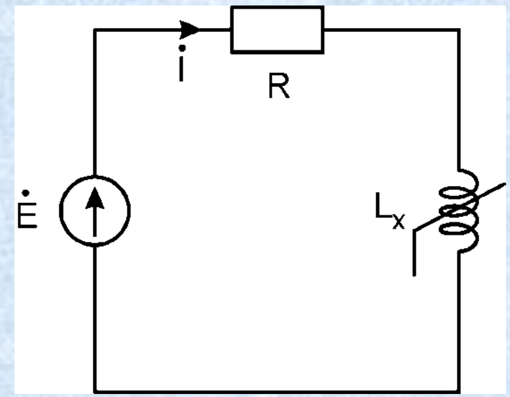
3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Các ví dụ tính toán:

- Mạch 1 phần tử phi tuyến (cho theo bảng, hàm, đồ thị)
- Mạch nhiều phần tử phi tuyến
- Mạch có chứa mạng hai cửa (A,Y,Z)
- Mạch 2 nguồn và vấn đề đẩy pha
- …

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Các ví dụ tính toán: Mạch 1 phần tử phi tuyến (cho theo bảng, hàm, đồ thị)



$$\dot{E} = 12\measuredangle 0°; R = 10\Omega; \quad L_x : \left|\dot{U}\right| = 2\left|\dot{I}\right| + 0,5\left|\dot{I}\right|^3$$

Chu trình dò:

$$\dot{I} \to \dot{U}_{Lx\,\text{(theo ®Æc tÝnh)}}; \dot{U}_R\left(= R\cdot\dot{I}\right) \to \dot{E}\left(= \dot{U}_{Lx} + \dot{U}_R\right)$$

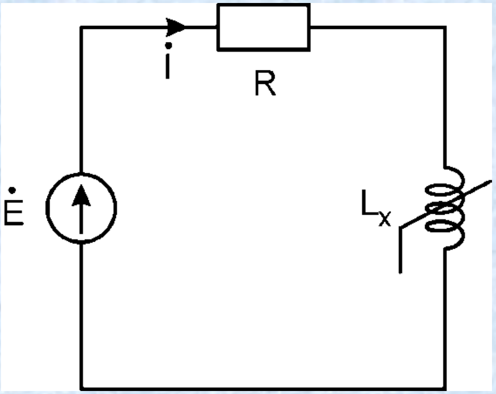
$$\dot{I} = 1\measuredangle 0° \to \begin{cases} \left|\dot{U}_{Lx}\right| = 2,5 \\ \measuredangle\dot{U}_{Lx} = 90° \end{cases} \to \dot{U}_{Lx} = 2,5\measuredangle 90° = j2,5; \dot{U}_R = 10$$

$$\to \dot{E} = 10 + j2,5 = 10,308\measuredangle 14,04°$$

$$\dot{I} = 1,2\measuredangle 0° \to \begin{cases} \left|\dot{U}_{Lx}\right| = 3,264 \\ \measuredangle\dot{U}_{Lx} = 90° \end{cases} \to \dot{U}_{Lx} = 3,264\measuredangle 90° = j3,264; \dot{U}_R = 12$$

$$\to \dot{E} = 12 + j3,264 = 12,436\measuredangle 15,22°$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương



Dò theo ***biên độ***:

$$\left|\dot{I}\right| = \frac{1,2-1}{12,436-10,308}\left(12-10,308\right)+1 = 1,159$$

Tiếp tục quá trình dò:

$$\dot{I} = 1,159\measuredangle 0^\circ \rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Lx}\right| = 3,096 \\ \measuredangle \dot{U}_{Lx} = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \dot{U}_{Lx} = 3,096\measuredangle 90^\circ = j3,096; \dot{U}_R = 11,59$$

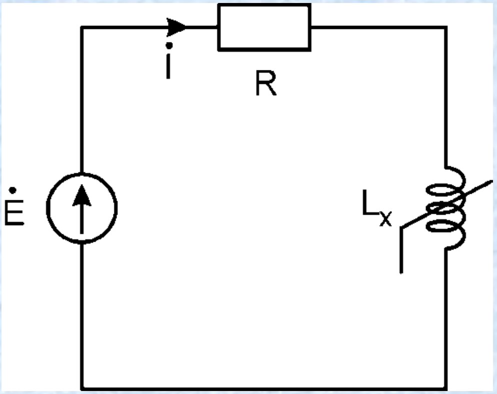
$$\rightarrow \dot{E} = 11,59 + j3,096 = 11,996\measuredangle 14,96^\circ \approx 12\measuredangle 14,96^\circ$$

<u>Nhận xét:</u>

- Về biên độ của nguồn đã đạt độ chính xác yêu cầu
- Về pha: khi tăng pha của tín hiệu xuất phát của chu trình dò thì tất cả các tín hiệu trên chu trình cũng tăng lên một lượng tương ứng.

$$\dot{I} = 1,159\measuredangle \varphi^\circ \rightarrow \dot{E} = 11,996\measuredangle\left(14,96+\varphi\right)^\circ \approx 12\measuredangle\left(14,96+\varphi\right)^\circ$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương



Do đó:

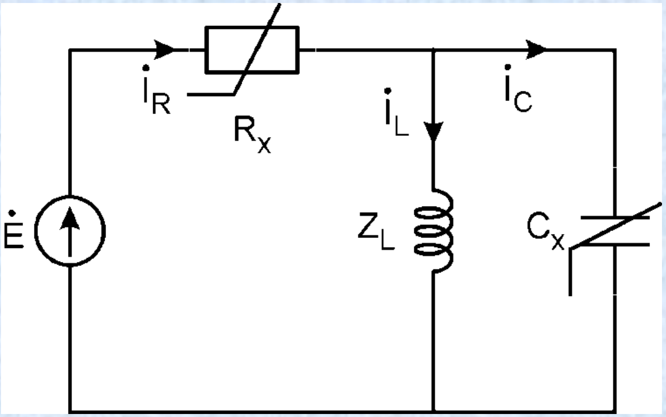
$$\dot{I} = 1,159\measuredangle -14,96° \rightarrow \dot{E} = 11,996\measuredangle 0° \approx 12\measuredangle 0°$$

<u>Bài tập:</u>

1. Hoàn tất việc xác đinh các tín hiệu và các công suất của các phần tử mạch.
2. Tính lại với các dạng đặc tính khác, với các dạng phần tử khác (R, C phi tuyến).

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Các ví dụ tính toán: Mạch 2 phần tử phi tuyến



$$\dot{E} = 12\measuredangle 0°; Z_L = j10\Omega;$$

$$R_x : \left|\dot{U}\right| = 7\left|\dot{I}\right| + 0{,}8\left|\dot{I}\right|^3 ; C_x : \left|\dot{U}\right| = 2\left|\dot{I}\right| + 0{,}5\left|\dot{I}\right|^3$$

Chu trình dò:

$$\dot{I}_C \rightarrow \dot{U}_{Cx} \text{(theo ®Æc tÝnh)} \rightarrow \dot{I}_L \left(= \frac{\dot{U}_{Cx}}{Z_L} \right) \rightarrow \dot{I}_R \left(= \dot{I}_C + \dot{I}_L \right)$$

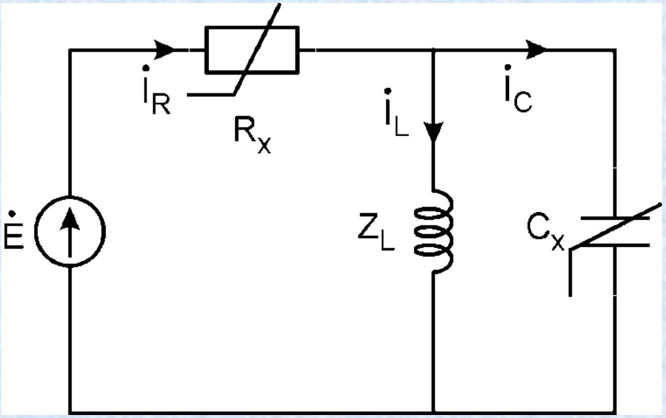
$$\rightarrow \dot{U}_{Rx} \text{(theo ®Æc tÝnh)} \rightarrow \dot{E} \left(= \dot{U}_{Rx} + \dot{U}_L \right)$$

$$\dot{I}_C = 1\measuredangle 0° \rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Cx}\right| = 2{,}5 \\ \measuredangle \dot{U}_{Cx} = -90° \end{cases} \rightarrow \dot{U}_{Cx} = 2{,}5\measuredangle -90° = -j2{,}5 \rightarrow \dot{I}_L = -0{,}25\measuredangle 0°$$

$$\rightarrow \dot{I}_R = 0{,}75\measuredangle 0° \rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Rx}\right| = 5{,}588 \\ \measuredangle \dot{U}_{Rx} = 0° \end{cases} \rightarrow \dot{E} = 5{,}588 - j2{,}5 = 6{,}122\measuredangle -24{,}10°$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Tiếp tục dò:



$$\dot{I}_C = 2\measuredangle 0° \rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Cx}\right| = 8 \\ \measuredangle \dot{U}_{Cx} = -90° \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{U}_{Cx} = 8\measuredangle -90° = -j8$$

$$\rightarrow \dot{I}_L = -0{,}8\measuredangle 0° \rightarrow \dot{I}_R = 1{,}2\measuredangle 0°$$

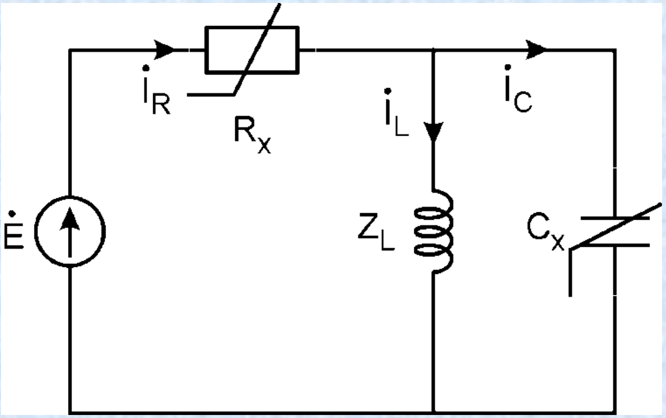
$$\rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Rx}\right| = 9{,}782 \\ \measuredangle \dot{U}_{Rx} = 0° \end{cases} \rightarrow \dot{E} = 9{,}782 - j8 = 12{,}637\measuredangle -39{,}28°$$

Dò theo ***biên độ***:

$$\left|\dot{I}\right| = \frac{2-1}{12{,}637-6{,}122}\left(12-6{,}122\right)+1 = 1{,}902$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Tiếp tục quá trình dò:



$$\dot{I}_C = 1{,}902\measuredangle 0° \rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Cx}\right| = 7{,}244 \\ \measuredangle \dot{U}_{Cx} = -90° \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{U}_{Cx} = 7{,}244\measuredangle -90° = -j7{,}244$$

$$\rightarrow \dot{I}_L = -0{,}724\measuredangle 0° \rightarrow \dot{I}_R = 1{,}178\measuredangle 0°$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left|\dot{U}_{Rx}\right| = 9{,}554 \\ \measuredangle \dot{U}_{Rx} = 0° \end{cases} \rightarrow \dot{E} = 9{,}554 - j7{,}244 = 11{,}99\measuredangle -37{,}17° \approx 12\measuredangle -37{,}17°$$

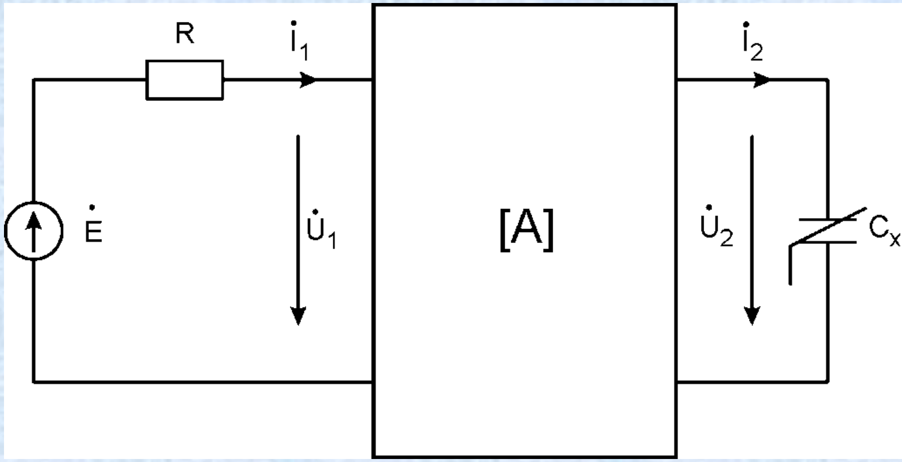
Đẩy pha: $\dot{I} = 1{,}902\measuredangle 37{,}17° \rightarrow \dot{E} = 11{,}99\measuredangle 0° \approx 12\measuredangle 0°$

Bài tập:

1. Hoàn tất việc xác định các tín hiệu và các công suất của các phần tử mạch.
2. Tính lại với các dạng đặc tính khác, với các dạng phần tử khác.

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Các ví dụ tính toán: Mạch có mạng hai cửa



$\dot{E} = 24\measuredangle 0°; R = 10\Omega;$

$C_x : \left|\dot{U}\right| = 2\left|\dot{I}\right| + 0,5\left|\dot{I}\right|^3$

Mạng hai cửa: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+j2 & -5+j25 \\ 0,2 & 2+j \end{bmatrix}$

Chu trình dò:

$$\dot{I}_2 \rightarrow \dot{U}_2(\text{theo ®Æc tÝnh}) \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 & = & a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 & = & a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \rightarrow \dot{E}\left(= R\cdot\dot{I}_1 + \dot{U}_1\right)$$

$$\dot{I}_2 = 1\measuredangle 0° \rightarrow \dot{U}_2 = -j2,5 \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 & = & a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}\dot{I}_2 = j22,5 \\ \dot{I}_1 & = & a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}\dot{I}_2 = 2+j0,5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{E} = 20 + j27,5 = 34,004\measuredangle 53,97°$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

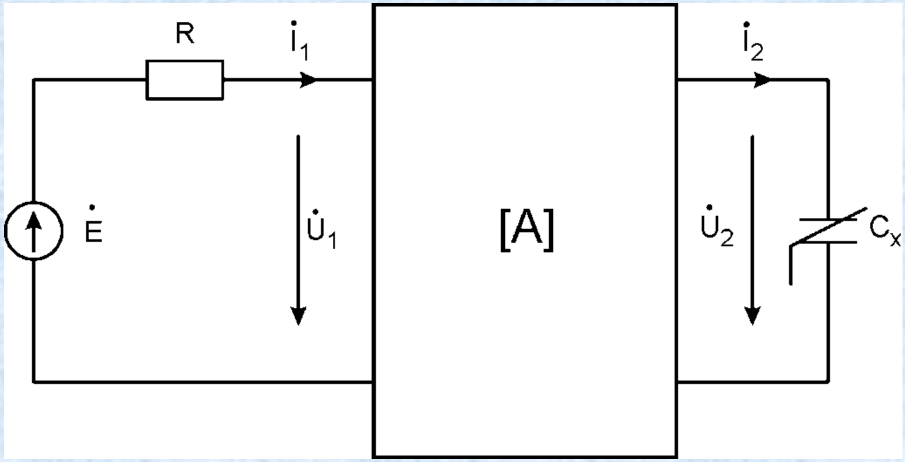
Tiếp tục dò:

$$\dot{I}_2 = 0,7\measuredangle 0° \rightarrow \dot{U}_2 = -j1,572 \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 & = & -0,356 + j15,928 \\ \dot{I}_1 & = & 1,4 + j0,386 \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{E} = 13,644 + j19,788 = 24,036\measuredangle 55,41° \approx 24\measuredangle 55,41°$$

Đẩy pha:

$$\dot{I}_2 = 0,7\measuredangle -55,41° \rightarrow \dot{E} = 24\measuredangle 0°$$

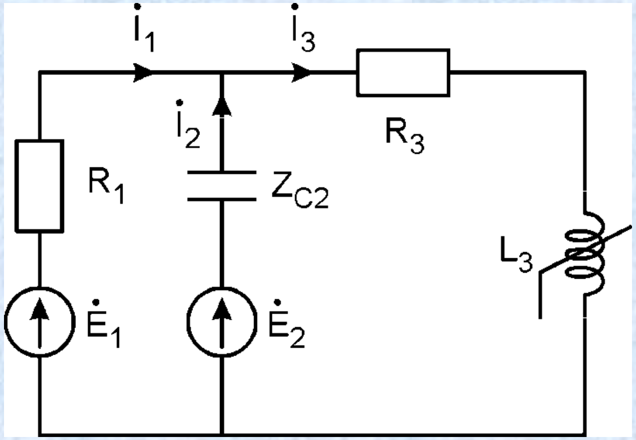


<u>Bài tập:</u>

1. Hoàn tất việc xác định các tín hiệu và các công suất của các phần tử mạch.
2. Tính lại với các dạng đặc tính khác, với các dạng phần tử khác.
3. Giải các mạch có mạng cho theo **Y** hoặc **Z**.

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Các ví dụ tính toán: Mạch nhiều nguồn và vấn đề đẩy pha



$$\dot{E}_1 = 18\measuredangle 20°; R_1 = 10\Omega; \dot{E}_2 = 12\measuredangle 30°; Z_{C2} = -j5;$$

$$R_3 = 7\Omega; L_3 : \left|\dot{U}\right| = 5\left|\dot{I}\right| + 0,7\left|\dot{I}\right|^3$$

Chu trình dò:

$$\dot{I}_3 \rightarrow \dot{U}_{L3\text{(theo ®Æc tÝnh)}}; \dot{U}_{R3}\left(= R_3 \cdot \dot{I}_3\right)$$

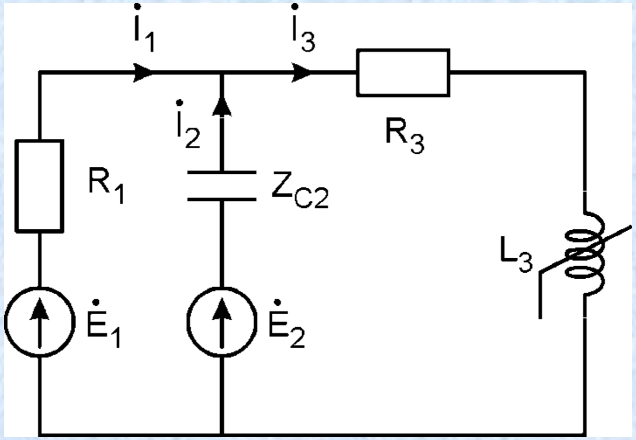
$$\rightarrow \dot{I}_2\left(= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{L3} - \dot{U}_{R3}}{Z_{C2}}\right) \rightarrow \dot{I}_1\left(= \dot{I}_3 - \dot{I}_2\right) \rightarrow \dot{E}_1\left(= R_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{U}_{R3} + \dot{U}_{L3}\right)$$

Vấn đề:

- Chu trình dò không có sai sót
- Nếu thực hiện theo chu trình này và đẩy pha ở bước cuối cùng thì kết quả không chính xác!!!

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Chu trình dò:



$$\dot{I}_3 = 1\angle 0° \rightarrow \dot{U}_{L3} = j5,7; \dot{U}_{R3} = 7\angle 0°$$

$$\rightarrow \dot{I}_2 = \frac{12\angle 30° - j5,7 - 7}{-j5} = -0,06 + j0,678$$

$$\rightarrow \dot{I}_1 = 1,06 - j0,678 \rightarrow \dot{E}_1 = 17,6 - j1,08 = 17,633\angle -3,51°$$

$$\dot{I}_3 = 1,2\angle 0° \rightarrow \dot{U}_{L3} = j7,21; \dot{U}_{R3} = 8,4\angle 0°$$

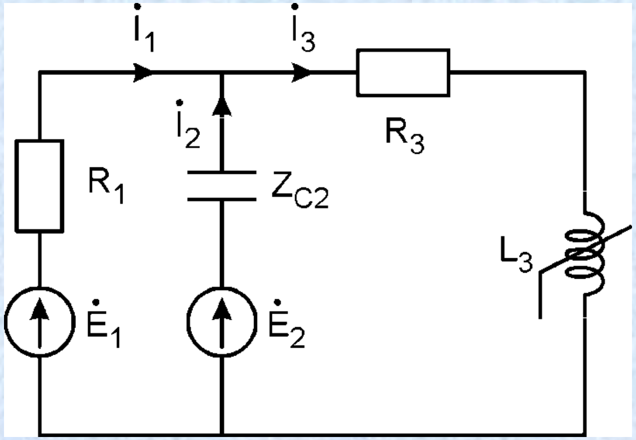
$$\rightarrow \dot{I}_2 = \frac{12\angle 30° - j7,21 - 8,4}{-j5} = 0,242 + j0,398$$

$$\rightarrow \dot{I}_1 = 0,958 - j0,398 \rightarrow \dot{E}_1 = 17,98 + j3,23 = 18,268\angle 10,18°$$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Dò theo ***biên độ***:

$$\left|\dot{I}_3\right| = \frac{1,2-1}{18,268-17,633}(18-17,633)+1 = 1,116$$



Tiếp tục dò:

$$\dot{I}_3 = 1,116\measuredangle 0^\circ \rightarrow \dot{U}_{L3} = j6,553; \dot{U}_{R3} = 7,812\measuredangle 0^\circ$$

$$\rightarrow \dot{I}_2 = \frac{12\measuredangle 30^\circ - j6,553 - 7,812}{-j5} = 0,111 + j0,516$$

$$\rightarrow \dot{I}_1 = 1,005 - j0,516 \rightarrow \dot{E}_1 = 17,862 + j1,393 = 17,916\measuredangle 4,46^\circ \approx 18\measuredangle 4,46^\circ$$

Đẩy pha: $\dot{I}_3 = 1,116\measuredangle 15,54^\circ \rightarrow \dot{E}_1 \approx 18\measuredangle 20^\circ$

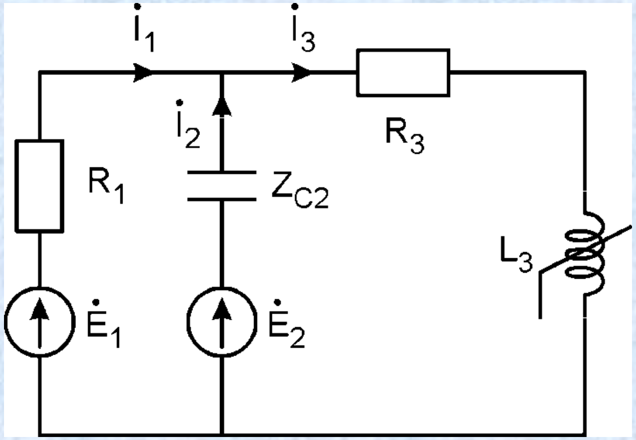
Kết quả sau khi đẩy pha bị sai!!!

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Giải lại có sử dụng nguồn tương đương Thé-ve-nin – Norton:

$$\dot{E}_1 = 18\measuredangle 20°; R_1 = 10\Omega; \dot{E}_2 = 12\measuredangle 30°; Z_{C2} = -j5;$$

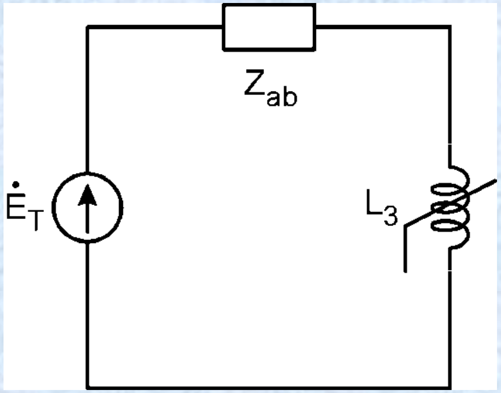
$$R_3 = 7\Omega; L_3 : \left|\dot{U}\right| = 5\left|\dot{I}\right| + 0,7\left|\dot{I}\right|^3$$



Mạch nguồn tương đương T-N:

$$Z_{ab} = \left(R_1 \parallel Z_{C2}\right) + R_3 = 9 - j4$$

$$\dot{E}_{Th} = \frac{\dfrac{\dot{E}_1}{R_1} + \dfrac{\dot{E}_2}{Z_{C2}}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{Z_{C2}}} = \frac{0,491 + j2,694}{0,1 + j0,2} = 12,247\measuredangle 16,23°$$



Chu trình dò trên mạch tương đương:

$$\dot{I}_3 \rightarrow \dot{U}_{L3}\text{(theo ®Æc tÝnh)}; \dot{U}_{ab}\left(= Z_{ab} \cdot \dot{I}_3\right) \rightarrow \dot{E}_{Th}\left(= \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{L3}\right)$$

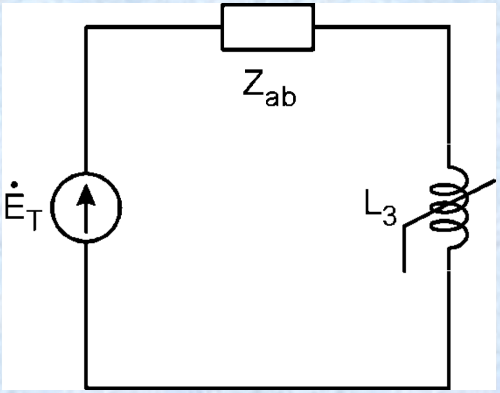
3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

$\dot{I}_3 = 1\measuredangle 0° \rightarrow \dot{U}_{L3} = j5,7; \dot{U}_{ab} = 9 - j4$

$\rightarrow \dot{E}_{Th} = 9 + j1,7 = 9,159\measuredangle 10,70°$

$\dot{I}_3 = 1,3\measuredangle 0° \rightarrow \dot{U}_{L3} = j8,038; \dot{U}_{ab} = 11,7 - j5,2$

$\rightarrow \dot{E}_{Th} = 11,7 + j2,838 = 12,039\measuredangle 13,63°$



Dò theo ***biên độ***:

$$\left|\dot{I}_3\right| = \frac{1,3-1}{12,039-9,159}\left(12,247-9,159\right)+1 = 1,322$$

Tiếp tục dò:

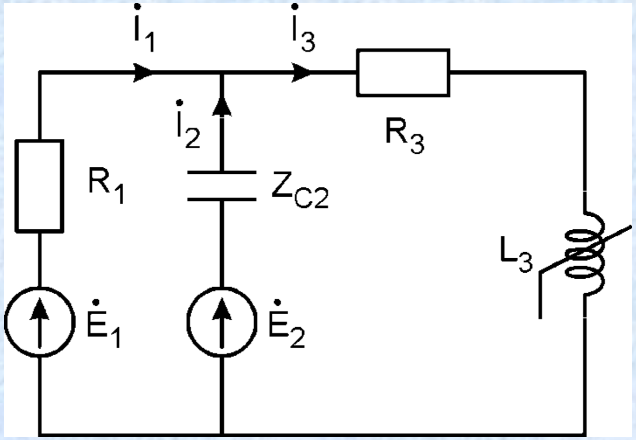
$\dot{I}_3 = 1,322\measuredangle 0° \rightarrow \dot{U}_{L3} = j8,227; \dot{U}_{ab} = 11,898 - j5,288$

$\rightarrow \dot{E}_{Th} = 11,898 + j2,939 = 12,256\measuredangle 13,88° \approx 12,247\measuredangle 13,88°$

Đẩy pha: $\dot{I}_3 = 1,322\measuredangle 2,35° \rightarrow \dot{E}_{Th} \approx 12,247\measuredangle 16,23°$

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Quay lại mạch ban đầu tìm các tín hiệu còn lại:



$$\dot{I}_3 \rightarrow \dot{U}_{L3}\text{(theo ®Æc tÝnh)};\dot{U}_{R3}\left(= R_3 \cdot \dot{I}_3\right)$$

$$\rightarrow \dot{I}_2\left(= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{L3} - \dot{U}_{R3}}{Z_{C2}}\right) \rightarrow \dot{I}_1\left(= \dot{I}_3 - \dot{I}_2\right)$$

$$\rightarrow \dot{E}_1\left(= R_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{U}_{R3} + \dot{U}_{L3}\right)$$

$$\dot{I}_3 = 1{,}322\measuredangle 2{,}35° \rightarrow \dot{U}_{L3} = 8{,}227\measuredangle 92{,}35°;\dot{U}_{R3} = 9{,}254\measuredangle 2{,}35°$$

$$\rightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{L3} - \dot{U}_{R3}}{Z_{C2}} = 0{,}52 + j0{,}297 = 0{,}599\measuredangle 29{,}71°$$

$$\rightarrow \dot{I}_1 = 0{,}801 - j0{,}243 = 0{,}837\measuredangle -16{,}86°$$

$$\rightarrow \dot{E}_1 = 16{,}915 + j6{,}173 = 18{,}006\measuredangle 20{,}04°$$

<u>*Bài tập:*</u> Hoàn tất việc xác định các tín hiệu và các công suất của các phần tử mạch.

3.3. Phương pháp điều hòa tương đương

Tóm tắt lại: Để khắc phục vấn đề đẩy pha, ta có thể giải mạch phi tuyến ở chế độ dừng theo các bước:

1. Sử dụng định luật Thé-ve-nin – Norton để đưa mạch nhiều nguồn về mạch tương đương chỉ có một nguồn.
2. Dò trên mạch tương đương để xác định các tín hiệu (có đẩy pha)
3. Khi đã có các tín hiệu của mạch tương đương, quay lại mạch ban đầu để dò (1 lần) các tín hiệu còn lại.

Câu hỏi: Nếu mạch không cho phép biến đổi tương đương thành mạch chỉ có một nguồn thì hướng giải quyết như thế nào?

Chương IV: Mạch phi tuyến ở chế độ xếp chồng

4.1. Các hiện tượng cơ bản

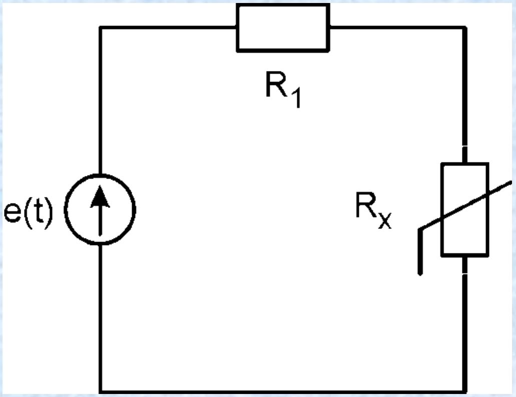
4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch có nhiều tần số

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ta xét ví dụ đơn giản:

$$e(t) = 12 + \sin(t); R_1 = 10\Omega; R_x : u = 2i + 0,5i^3.$$



Yêu cầu bắt buộc:

- Nguồn DC cần có biên độ rất lớn so với các thành phần AC.
- Thực tế mạch điện tử thường có nguồn DC cỡ V, nguồn AC cỡ mV
- Trong các ví dụ, để thuận tiện cho việc tính toán, ta tạm xét hai mức tín hiệu chênh nhau khoảng 10 lần trở lên.

4.1. Các hiện tượng cơ bản

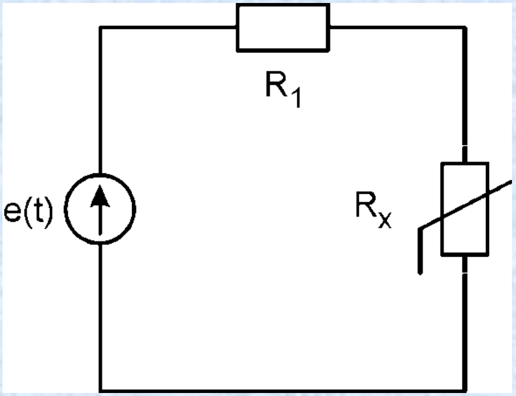
Phương trình gốc: $u_{R1}(t)+u_{Rx}(t)-e(t)=0 \rightarrow u_{Rx}(t)=e(t)-R\cdot i(t)$

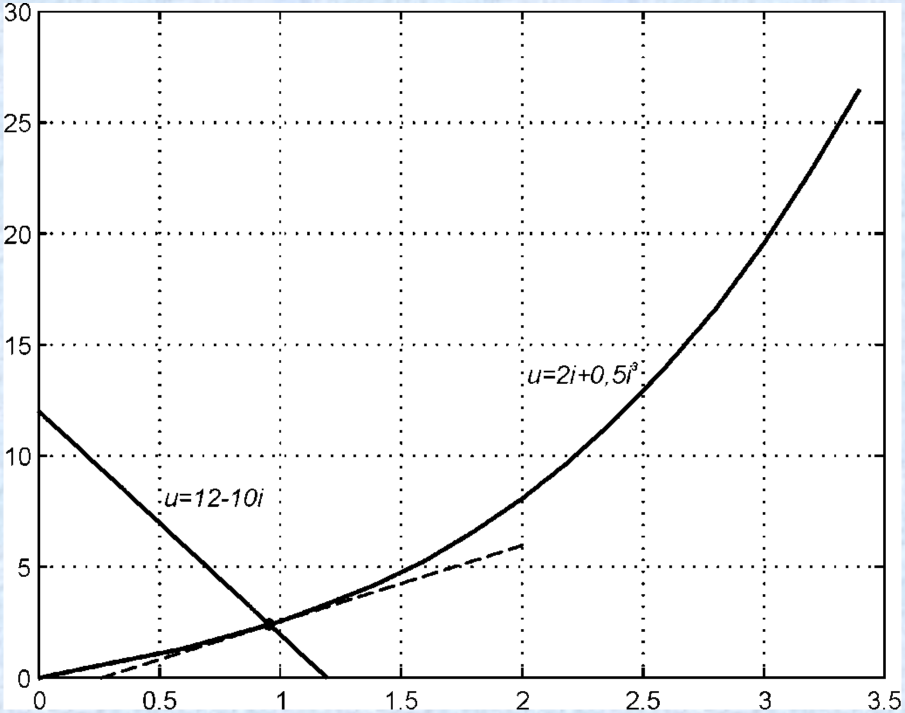
Nếu chỉ có thành phần 1 chiều tác động: Ta có *<u>điểm làm việc tĩnh</u>* A=(I_{DC},U_{DC}) của điện trở phi tuyến R_x (có thể tìm bằng các phương pháp đã biết)

$$10I_{DC}+\left(2I_{DC}+0,5I_{DC}^3\right)-12=0$$

$$2I_{DC}+0,5i_{DC}^3=12-10I_{DC}$$

$$\rightarrow I_{DC}=0,963 \rightarrow U_{Rx\_DC}=2,373$$



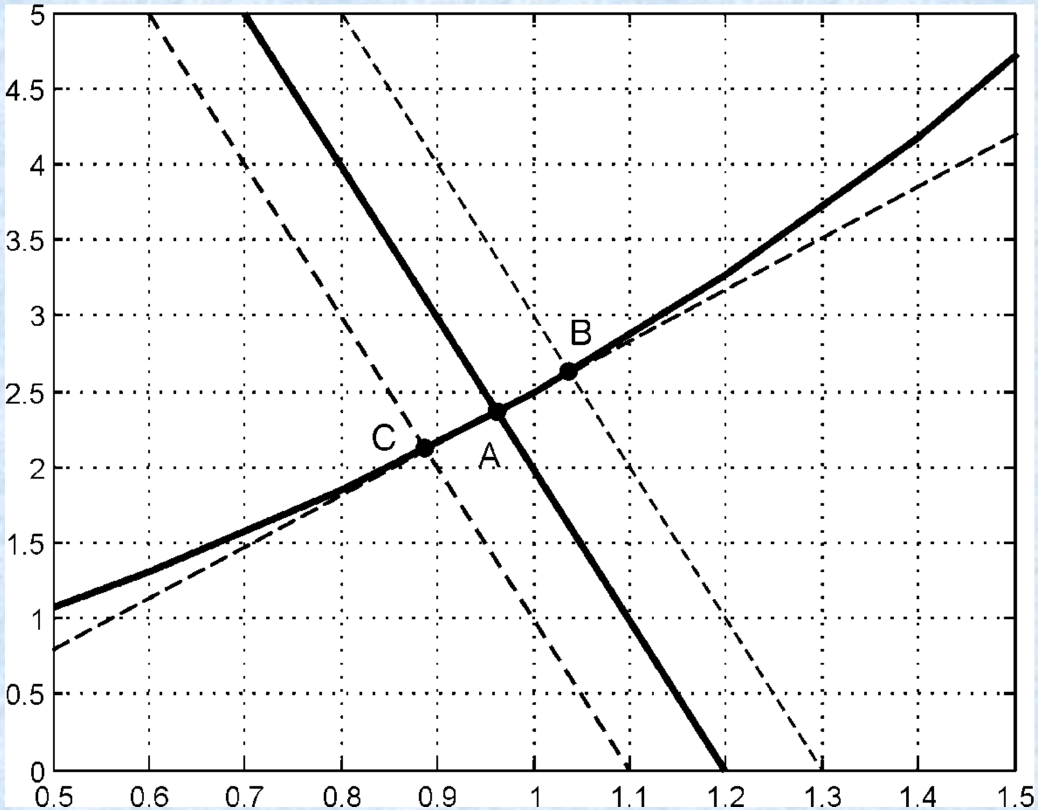


4.1. Các hiện tượng cơ bản

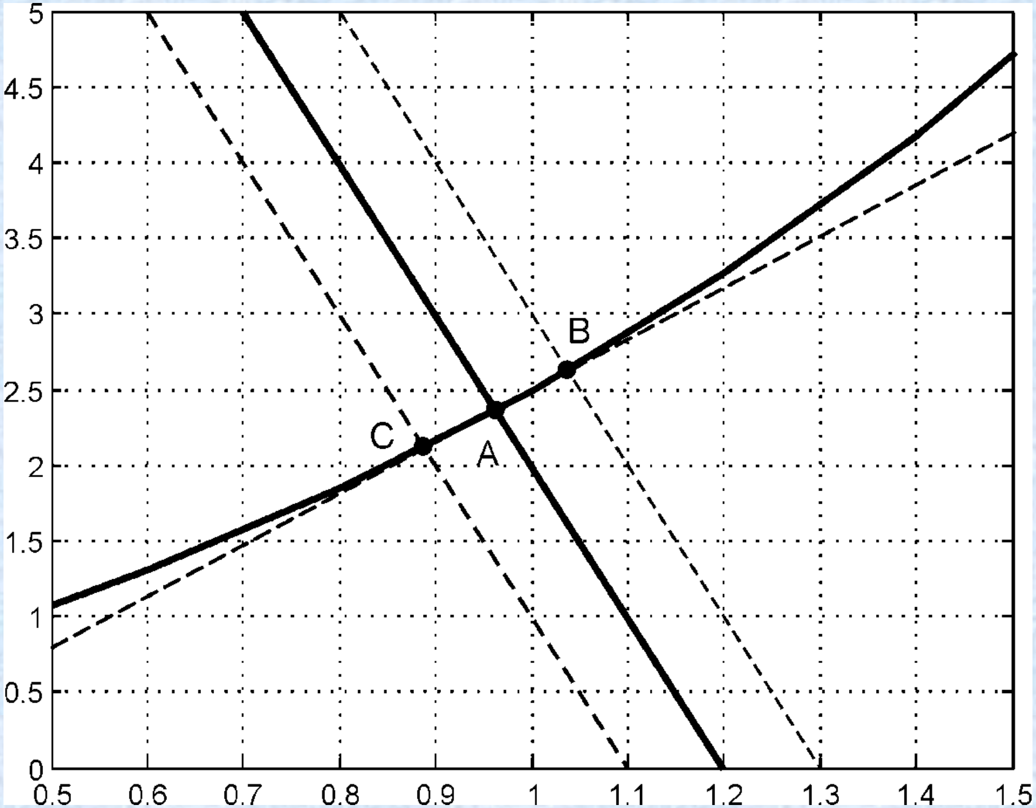
Khi xét cả hai thành phần tác động: Ta có:

1. Giá trị nguồn e(t) giao động xung quanh giá trị nguồn DC, cụ thể $e(t)=12+\sin(t) \in [11,13]$

2. Quan sát trên đồ thị ta có *điểm làm việc* của điện trở phi tuyến R_x sẽ "trượt" trong một đoạn BC (điểm B ứng với nguồn đạt giá trị cực đại (13), điểm C ứng với nguồn đạt giá trị cực tiểu (11))



4.1. Các hiện tượng cơ bản



Đoạn làm việc BC có thể được xấp xỉ bằng:

- đường tiếp tuyến với đặc tính tại điểm A!
- …

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Khi xét cả hai thành phần tác động: Ta có:

3. Khi chỉ xét trường hợp nguồn AC có biên độ rất nhỏ so với nguồn DC ta có:

- Đoạn BC rất ngắn -> Có thể coi như thẳng
- Đoạn "thẳng" BC có thể được xấp xỉ bằng đường tiếp tuyến với đặc tính của phần tử phi tuyến tại A.
- Khi đoạn đặc tính "thẳng" -> có thể thay phần tử phi tuyến bằng một "*mạch **tuyến tính** tương đương*"

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp: Các mô hình tương đương cho đoạn làm việc nhỏ của phần tử phi tuyến:

- Điện trở phi tuyến:

$$u - U_0 = f'(I_0)\cdot(i - I_0)$$

$$\rightarrow u = f'(I_0)\cdot i - \left[f'(I_0)\cdot I_0 - U_0\right] = R_{®}\cdot i - E_{ps}$$

với

$$R_{®} = f'(I_0); E_{ps} = f'(I_0)\cdot I_0 - U_0$$

Như vậy điện trở động chính là *hệ số góc* của đường tiếp tuyến với đặc tính tại *điểm làm việc tĩnh*.

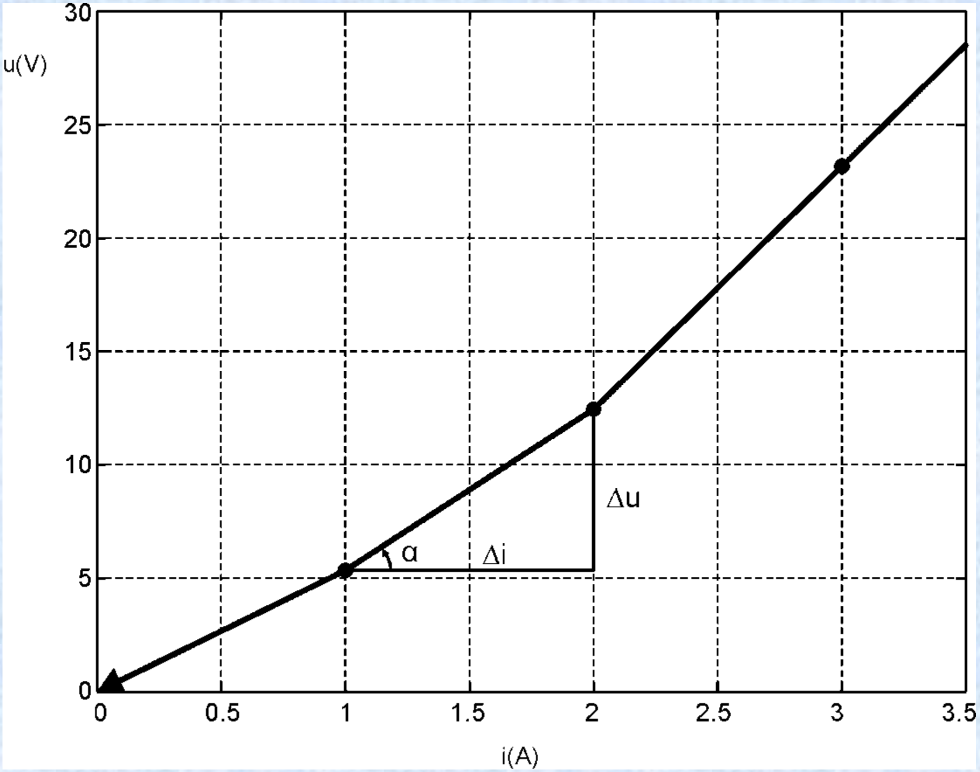
4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp (2):

Trong trường hợp đặc tính cho theo bảng: Đặc tính là một đường gấp khúc nối từng đoạn thẳng liên tiếp -> tiếp tuyến của đặc tính trong một đoạn đặc tính chính là đoạn đặc tính đó -> Hệ số góc có thể được tính từ các điểm đặc tính ở hai đầu.

$$I_0 \in \left(I_k, I_{k+1}\right) \rightarrow$$

$$R_{®} = \tan\left(\alpha\right) = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{U_{k+1} - U_k}{I_{k+1} - I_k}$$



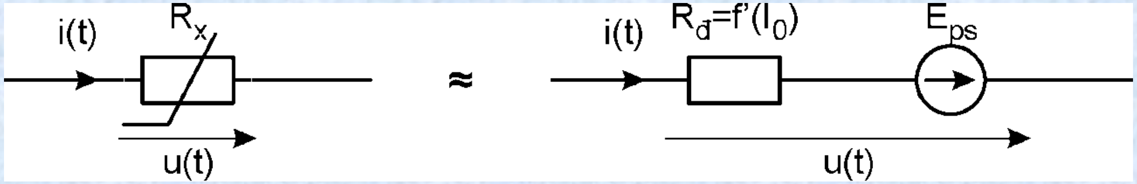
Chú ý: Tiếp tuyến không xác định được nếu điểm làm việc tĩnh trùng với các điểm nút trong bảng.

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp (3):

<u>Trong trường hợp đặc tính cho theo đồ thị:</u> Ta cần tự ước lượng và kẻ đường tiếp tuyến tại điểm làm việc tĩnh. Sau đó tiếp tục ước lượng hệ số góc của tiếp tuyến -> Sai số sẽ tương đối lớn!

$$u = R_{\circledR} \cdot i - E_{ps}$$



Mô hình tuyến tính tương đương của điện trở phi tuyến R_x

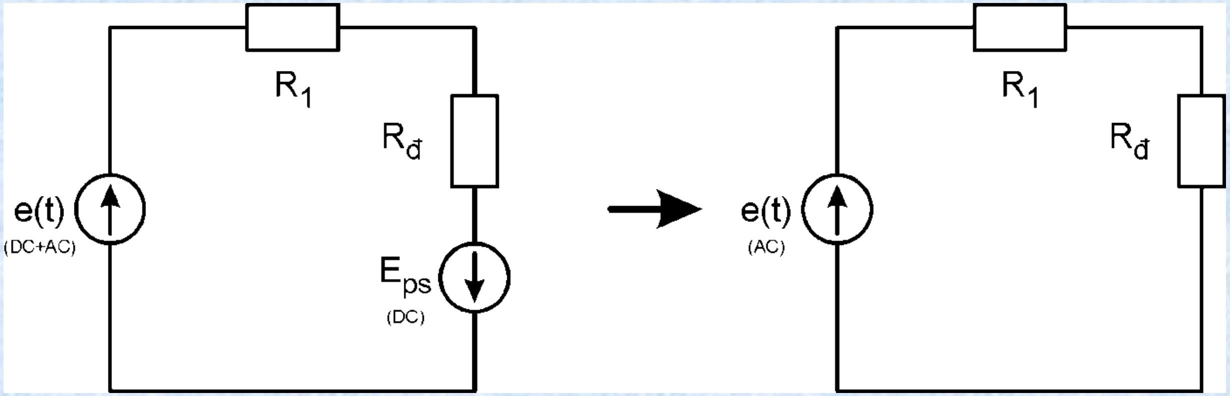
xung quanh điểm làm việc tĩnh

<u>Bài tập:</u> Trường hợp đặc tính cho theo hàm ngược i=f(u) thì điện trở động tính như thế nào?

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp (4):

Khi xét mạch ***ở chế độ xác lập*** ta chưa cần quan tâm đến giá trị (và cũng có nghĩa là chưa cần quan tâm đến công thức) của nguồn phát sinh E_{ps} do theo nguyên lý xếp chồng thì trong mạch điện ta đã giải được thành phần 1 chiều, khi tính thành phần xoay chiều thì các nguồn 1 chiều "tắt", có nghĩa là nguồn phát sinh E_{ps} cũng được thay bởi dây dẫn -> không ảnh hưởng tới quá trình tính toán thành phần xoay chiều.



4.1. Các hiện tượng cơ bản

Hoàn thiện tính toán của ví dụ:

Giá trị điện trở động: $R_{\circledR} = u'_{(i=I_{DC})} = \left(2 + 1,5i^2\right)_{i=0,963} = 3,391(\Omega)$

Dòng toàn mạch: $i_{AC}(t) = \dfrac{e(t)}{R_1 + R_{\circledR}} = \dfrac{\sin(t)}{10 + 3,391} = 0,0747\sin(t)$

Tổng hợp nghiệm: $i(t) = I_{DC} + i_{AC}(t) = 0,963 + 0,0747\sin(t)$

<u>*Chú ý:*</u> - Các tín hiệu u(t) và i(t) trong mạch có thành phần AC rất nhỏ so với DC.

- Mạch điện đang xét là mạch thuần trở nên thành phần AC có thể tính trực tiếp như trên mà không cần sử dụng ảnh phức!

<u>*Bài tập:*</u> Tính toán các công suất trong mạch. Từ đó đưa ra nhận xét về tỷ lệ thành phần công suất AC và thành phần công suất DC.

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp (5): Mô hình tương đương cho cuộn dây phi tuyến trong một đoạn làm việc nhỏ:

$$\psi - \psi_0 = f'(I_0)\cdot(i - I_0)$$

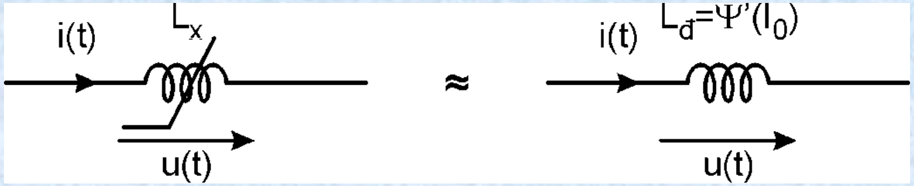
$$\rightarrow \psi = f'(I_0)\cdot i - \left[f'(I_0)\cdot I_0 - \psi_0 \right] = L_{\circledR}\cdot i - \psi_{ps}$$

với

$$L_{\circledR} = f'(I_0); \psi_{ps} = \psi_0 - f'(I_0)\cdot I_0$$

Từ đó suy ra quan hệ u-i và mô hình tương đương như sau:

$$\rightarrow u(t) = \frac{d\psi}{dt} = L_{\circledR}\frac{di}{dt}$$



Từ công thức trên ta có cuộn dây phi tuyến tương đương như một cuộn dây *tuyến tính* ở xung quanh điểm làm việc của mình (không có nguồn phát sinh như trong trường hợp của điện trở).

4.1. Các hiện tượng cơ bản

Ý tưởng của phương pháp (6): Mô hình tương đương cho tụ điện phi tuyến trong một đoạn làm việc nhỏ:

$$q - Q_0 = f'(U_0)\cdot(u - U_0)$$

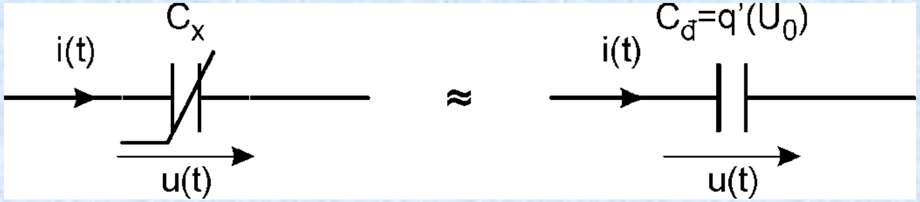
$$\rightarrow q = f'(U_0)\cdot u + \left[Q_0 - f'(U_0)\cdot U_0\right] = C_{\text{®}}\cdot u + Q_{ps}$$

với

$$C_{\text{®}} = f'(U_0); Q_{ps} = Q_0 - f'(U_0)\cdot U_0$$

Từ đó suy ra quan hệ u-i và mô hình tương đương như sau:

$$\rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = C_{\text{®}}\frac{du}{dt}$$



Từ công thức trên ta có tụ điện phi tuyến tương đương như một tụ điện *tuyến tính* ở xung quanh điểm làm việc của mình (không có nguồn phát sinh như trong trường hợp của điện trở).

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Tóm tắt lại quá trình giải mạch bằng phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc gồm 3 bước:

Bước 1: Chỉ cho thành phần DC tác động. Xác định các điểm làm việc của các phần tử phi tuyến và các tín hiệu khác theo yêu cầu.

Bước 2: Xác định các phần tử động (tuyến tính) tương đương của các phần tử phi tuyến xung quanh các điểm làm việc (đã xác định ở bước 1).

Bước 3: Cho các thành phần AC tác động, giải mạch tương đương ***tuyến tính*** (theo các phương pháp đã biết)

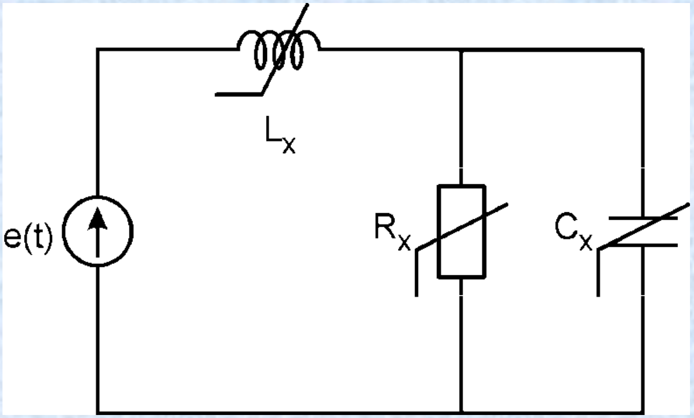
4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Điểm làm việc và phần tử động tương đương của các phần tử phi tuyến:

Phần tử	Điểm làm việc	Phần tử động khi có hàm đặc tính	Phần tử động khi có bảng đặc tính
R_x	$\left(I_0, U_0\right)$	$R_{\text{®}} = u'(i)\big\|_{i=I_0}$	$R_{\text{®}} = \dfrac{U_{k+1} - U_k}{I_{k+1} - I_k}$
L_x	$\left(I_0, \Psi_0\right)$	$L_{\text{®}} = \Psi'(i)\big\|_{i=I_0}$	$L_{\text{®}} = \dfrac{\Psi_{k+1} - \Psi_k}{I_{k+1} - I_k}$
C_x	$\left(U_0, Q_0\right)$	$C_{\text{®}} = q'(u)\big\|_{u=U_0}$	$C_{\text{®}} = \dfrac{Q_{k+1} - Q_k}{U_{k+1} - U_k}$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Ví dụ tổng hợp cả ba dạng phần tử:



$$e(t) = 12 + \sin(t); R_x : u = 8i + 0,5i^3;$$

$$L_x : \psi = 2i + 0,3i^3;$$

Tụ điện phi tuyến C_x có đặc tính:

U(V)	**0**	**6**	**17**	**21**
q(C)	**0**	**1**	**2**	**3**

Yêu cầu: Xác định các dòng nhánh trong mạch.

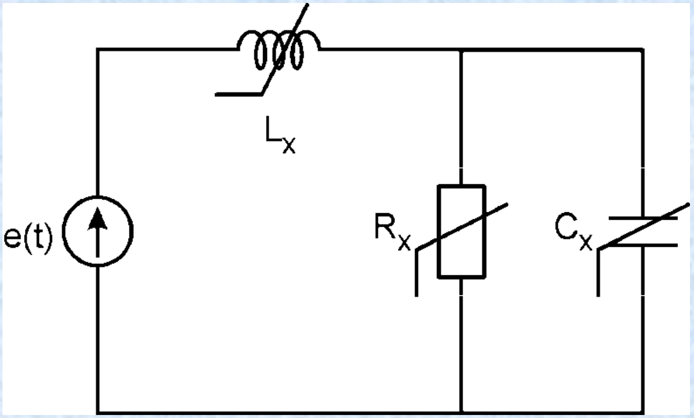
<u>Bước 1:</u>

Khi thành phần DC tác động: Các cuộn dây và tụ điện suy biến, dẫn tới ta có:

$$u_{Lx\_DC} = 0 \rightarrow u_{Rx\_DC} = u_{Cx\_DC} = E_{DC} = 12.$$

$$u_{Rx\_DC} = 12 \rightarrow i_{Rx\_DC} = 1,347 \rightarrow i_{Lx\_DC} = 1,347.$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



<u>*Bước 2:*</u>

Xác định các phần tử động tuyến tính:

$$R_x \to R_{\text{®}} = 8 + 1,5i^2\Big|_{i=I_{Rx\_DC}} = 10,722;$$

$$L_x \to L_{\text{®}} = 2 + 0,9i^2\Big|_{i=I_{Lx\_DC}} = 3,633;$$

$$C_x \to C_{\text{®}} = \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{2-1}{17-6} = 0,0909.$$

<u>*Bước 3:*</u>

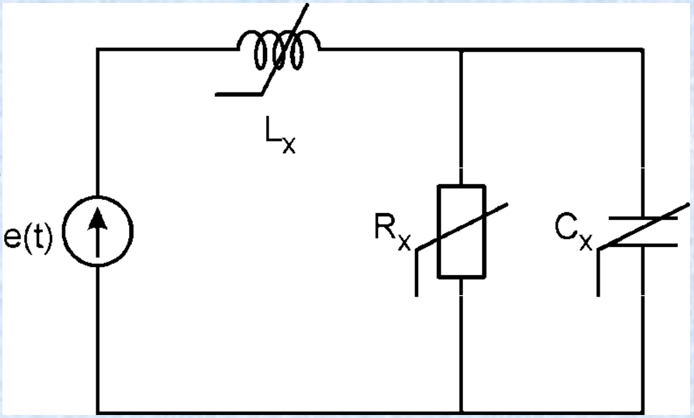
Giải thành phần AC trên mạch tuyến tính tương đương:

$$L_{\text{®}} = 3,633 \to Z_{L\text{®}} = j3,633; C_{\text{®}} = 0,0909 \to Z_{C\text{®}} = -j11.$$

Ví dụ giải mạch bằng phương pháp tổng trở tương đương:

$$Z_{t\text{®}} = \left(R_{\text{®}} \| Z_{C\text{®}}\right) + Z_{L\text{®}} = 5,498 - j1,726 = 5,763\measuredangle -17,43^\circ \to \dot{I}_{Lx\_AC} = \frac{\dot{E}_{AC}}{Z_{t\text{®}}}$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



Bước 3 (tiếp):

$$\dot{I}_{Rx\_AC} = \dot{I}_{Lx\_AC} \frac{Z_{C\text{®}}}{R_{\text{®}} + Z_{C\text{®}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0{,}124\measuredangle -26{,}84°$$

$$\dot{I}_{Cx\_AC} = \dot{I}_{Lx\_AC} \frac{R_{\text{®}}}{R_{\text{®}} + Z_{C\text{®}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0{,}121\measuredangle 63{,}16°$$

Tổng hợp nghiệm:

$$i_{Lx}(t) = I_{Lx\_DC} + i_{Lx\_AC}(t) = 1{,}347 + 0{,}174\sin(t + 17{,}43°)$$

$$i_{Rx}(t) = I_{Rx\_DC} + i_{Rx\_AC}(t) = 1{,}347 + 0{,}124\sin(t - 26{,}84°)$$

$$i_{Cx}(t) = I_{Cx\_DC} + i_{Cx\_AC}(t) = 0{,}121\sin(t + 63{,}16°)$$

Bài tập: Tính các tín hiệu điện áp. Tính các công suất.

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

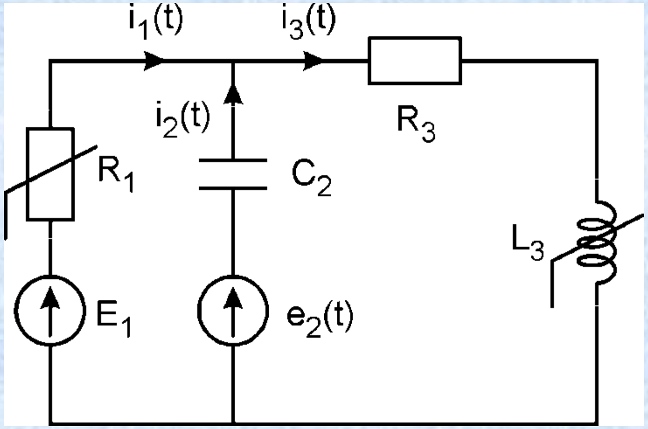
Ví dụ mạch nhiều nguồn:

$E_1 = 12V; R_1 : u = 8i + 0,5i^3;$

$e_2(t) = \sin(2t + 15°)V; C_2 = 0,05F;$

$R_3 = 10\Omega; L_3 : \psi = 2i + 0,3i^3;$

Yêu cầu: Xác định các dòng nhánh trong mạch.



<u>*Bước 1:*</u>

Khi thành phần DC tác động: Các cuộn dây và tụ điện suy biến, nguồn AC "tắt", dẫn tới ta có:

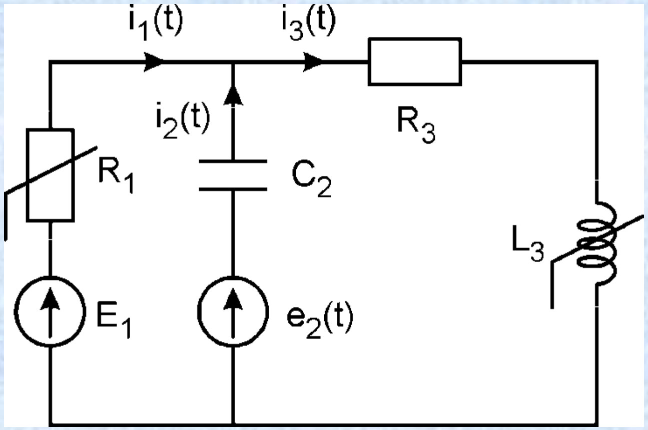
$$U_{R1\_DC} + U_{R3\_DC} - E_1 = 0 \to 10I_{1\_DC} + \left(8I_{1\_DC} + 0,5I^3_{1\_DC}\right) - 12 = 0$$

$$\to I_{1\_DC} = 0,659\left(= I_{3\_DC}\right)$$

$$I_{2\_DC} = 0.$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

<ins>*Bước 2:*</ins>



Xác định các phần tử động tuyến tính:

$$R_1 \to R_{\text{®}} = 8 + 1,5i^2\Big|_{i=I_{R1\_DC}} = 8,651;$$

$$L_3 \to L_{\text{®}} = 2 + 0,9i^2\Big|_{i=I_{L3\_DC}} = 2,391;$$

<ins>*Bước 3:*</ins>

Giải thành phần AC trên mạch tuyến tính tương đương:

Nguồn DC "tắt", $L_{\text{®}} = 2,391 \to Z_{L\text{®}} = j4,782;$

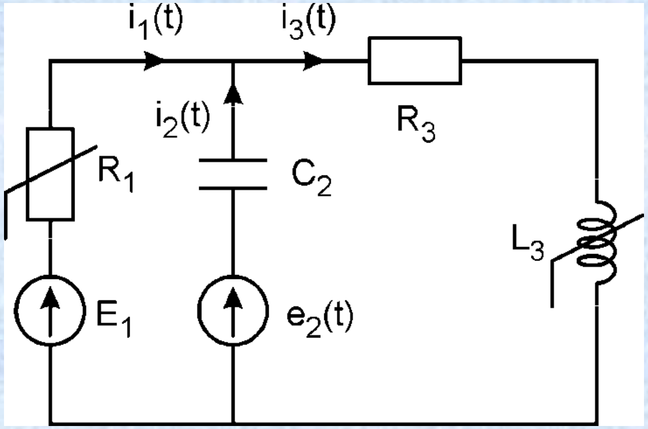
Ví dụ giải mạch bằng phương pháp điện thế nút:

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{R_{\text{®}}} + \frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{R_3 + Z_{L\text{®}}}\right) = \frac{\dot{E}_2}{Z_{C2}}$$

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{8,651} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{10 + j4,782}\right) = \frac{0,707\angle 15^\circ}{-j10}$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Bước 3 (tiếp):



$$\dot{\varphi}_a \cdot 0,206\measuredangle 17,23° = 0,0707\measuredangle 105°$$

$$\rightarrow \dot{\varphi}_a = 0,343\measuredangle 87,77°$$

Các dòng nhánh:

$$\dot{I}_{1\_AC} = \frac{-\dot{\varphi}_a}{R_{®}} = 0,0396\measuredangle -92,23°$$

$$\dot{I}_{2\_AC} = \frac{-\dot{\varphi}_a + \dot{E}_2}{Z_{C2}} = 0,0688\measuredangle 76,58°$$

$$\dot{I}_{3\_AC} = \frac{\dot{\varphi}_a}{R_3 + Z_{L®}} = 0,0309\measuredangle 62,21°$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

<u>Bước 3 (tiếp):</u>

<u>Tổng hợp nghiệm:</u>

$$i_1(t) = I_{1\_DC} + i_{1\_AC}(t) = 0,659 + 0,0396\sqrt{2}\sin(2t - 92,23°)$$

$$i_2(t) = I_{2\_DC} + i_{2\_AC}(t) = 0,0688\sqrt{2}\sin(2t + 76,58°)$$

$$i_3(t) = I_{3\_DC} + i_{3\_AC}(t) = 0,659 + 0,0309\sqrt{2}\sin(2t + 62,21°)$$

<u>Bài tập:</u> Tính các tín hiệu điện áp. Tính các công suất.

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Ví dụ 2: Tính dòng đầu ra mạng hai cửa

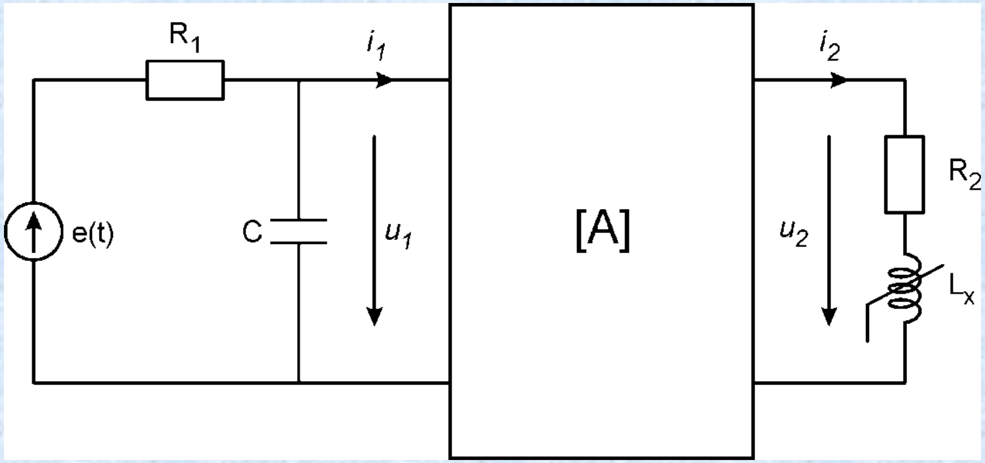
$e(t) = 12 + \sin(5t + 30°)V; R_1 = 5\Omega;$

$C = 0,05F; R_2 = 5\Omega;$

$L_x : \psi = 2i + 0,3i^3;$

Mạng hai cửa *thuần trở* có:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0,2 & 1,5 \end{bmatrix}$$

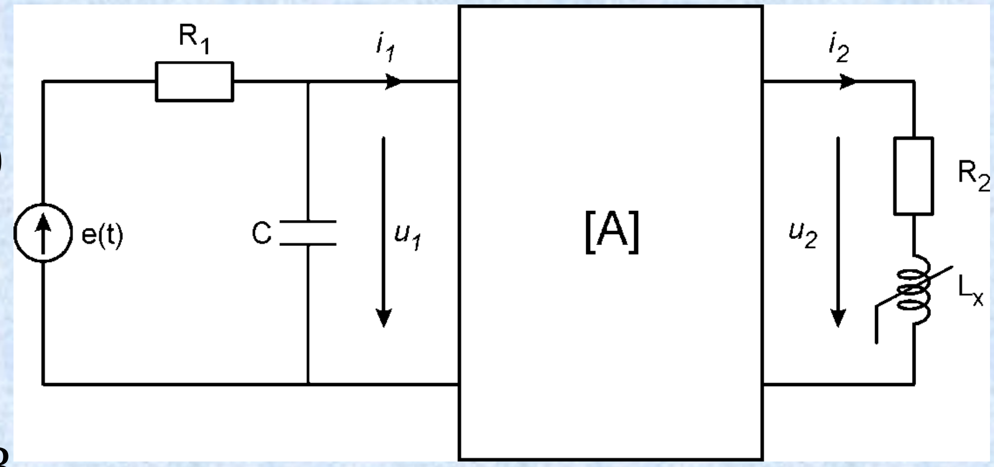


Bước 1:

Khi thành phần DC tác động: Các cuộn dây và tụ điện suy biến, ta có mạch tương đương *tuyến tính!*

$$R_{v\mu o} = \frac{a_{11}R_2 + a_{12}}{a_{21}R_2 + a_{22}} = \frac{20}{2,5} = 8 \rightarrow I_{1\_DC} = \frac{E_{DC}}{R_1 + R_{v\mu o}} = \frac{12}{5+8} = 0,923$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



<u>*Bước 1 (tiếp):*</u>

$$I_{2\_DC} = \frac{I_{1\_DC}}{a_{21}R_2 + a_{22}} = \frac{0,923}{2,5} = 0,369$$

<u>*Bước 2:*</u> Xác định các phần tử động tuyến tính:

$$L_x \rightarrow L_{®} = 2 + 0,9i^2\Big|_{i=I_{2\_DC}} = 2,123.$$

<u>*Bước 3:*</u>

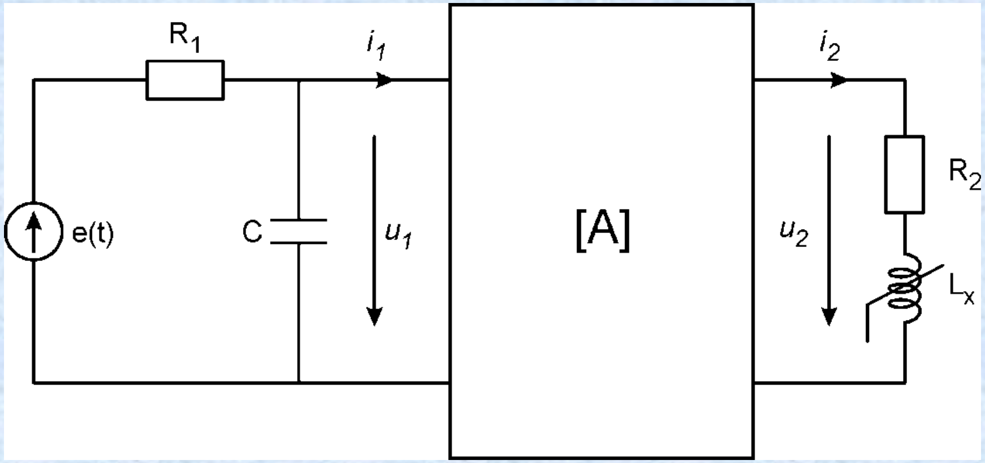
Giải thành phần AC trên mạch tuyến tính tương đương:

$$L_{®} = 2,123 \rightarrow Z_{L®} = j10,615 \rightarrow Z_2 = R_2 + Z_{L®} = 5 + j10,615$$

Ví dụ giải mạch bằng phương pháp tổng trở vào:

$$Z_{v\mu o} = \frac{a_{11}Z_2 + a_{12}}{a_{21}Z_2 + a_{22}} = \frac{2(5 + j10,615) + 10}{0,2(5 + j10,615) + 1,5} = 8,838 + j0,987$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



Bước 3 (tiếp):

Phương trình cho điện thế nút:

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{Z_C}+\frac{1}{Z_{v\mu o}}\right)=\frac{\dot{E}_{AC}}{R_1}$$

Thay số:

$$\dot{\varphi}_a\cdot 0,392\measuredangle 37,3°=0,707\measuredangle 30°$$

$$\rightarrow\dot{\varphi}_a=1,804\measuredangle -7,3°\left(=\dot{U}_{1\_AC}\right)$$

Dòng đầu ra mạng hai cửa:

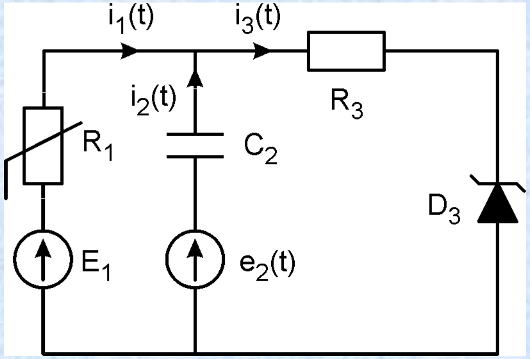
$$\dot{I}_{2\_AC}=\frac{\dot{U}_{1\_AC}}{a_{11}Z_2+a_{12}}=\frac{1,804\measuredangle -7,3°}{2(5+j10,615)+10}=0,0619\measuredangle -54,01°$$

Tổng hợp nghiệm:

$$i_2(t)=I_{2\_DC}+i_{2\_AC}(t)=0,369+0,0619\sqrt{2}\sin(5t-54,01°)$$

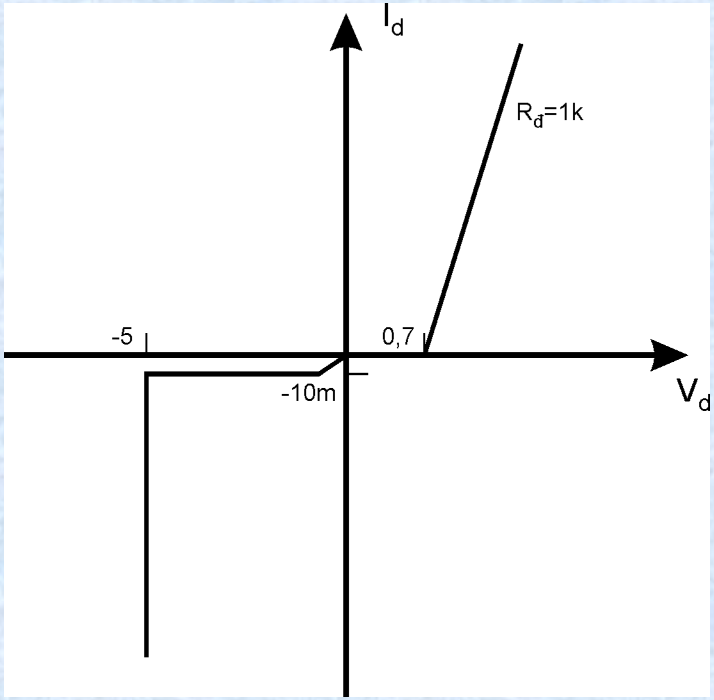
4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Ví dụ mạch có diode:



$$E_1 = 12V; e_2(t) = \sin(2t + 15°)V; R_1 : u = 8i + 0,5i^3;$$
$$C_2 = 0,05F; R_3 = 10\Omega;$$

Diode có đặc tính như hình vẽ. Tìm các dòng nhánh trong mạch.



<u>Bước 1:</u>

Khi thành phần DC tác động:

Tụ điện suy biến, nguồn AC "tắt", dẫn tới:

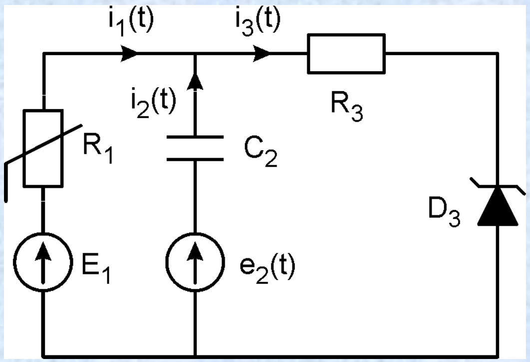
$$U_{R1\_DC} + U_{R3\_DC} + U_{D3\_DC} - E_1 = 0$$

$$\rightarrow 10I_{1\_DC} + \left(8I_{1\_DC} + 0,5I_{1\_DC}^3\right) + 5 - 12 = 0$$

$$\rightarrow I_{1\_DC} \simeq 0,387 \left(= I_{3\_DC}\right)$$

$$I_{2\_DC} = 0.$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



Bước 2:

Xác định các phần tử động tuyến tính:

$$R_1 \rightarrow R_{®} = 8 + 1,5i^2\Big|_{i=I_{R1\_DC}} = 8,225;$$

$$D_3 \rightarrow R_{®} = 0;$$

Bước 3:

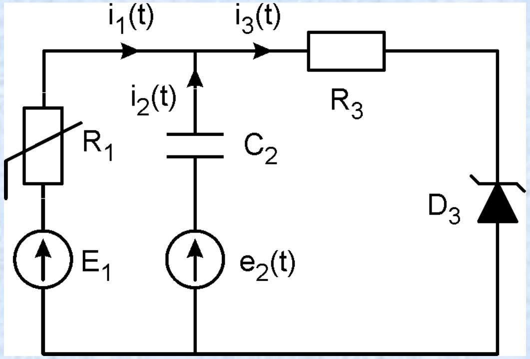
Giải thành phần AC trên mạch tuyến tính tương đương:

Ví dụ giải mạch bằng phương pháp điện thế nút:

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{R_{®}} + \frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{\dot{E}_2}{Z_{C2}}$$

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{8,225} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{0,707\measuredangle 15^\circ}{-j10}$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc



Bước 3 (tiếp):

$$\dot{\varphi}_a \cdot 0,243\measuredangle 24,29^\circ = 0,0707\measuredangle 105^\circ$$

$$\rightarrow \dot{\varphi}_a = 0,291\measuredangle 80,71^\circ$$

Các dòng nhánh:

$$\dot{I}_{1\_AC} = \frac{-\dot{\varphi}_a}{R_{®}} = 0,0354\measuredangle -99,29^\circ$$

$$\dot{I}_{2\_AC} = \frac{-\dot{\varphi}_a + \dot{E}_2}{Z_{C2}} = 0,0645\measuredangle 80,71^\circ$$

$$\dot{I}_{3\_AC} = \frac{\dot{\varphi}_a}{R_3} = 0,0291\measuredangle 80,71^\circ$$

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Bước 3 (tiếp):

Tổng hợp nghiệm:

$$i_1(t) = I_{1\_DC} + i_{1\_AC}(t) = 0,659 + 0,0396\sqrt{2}\sin(2t - 92,23°)$$

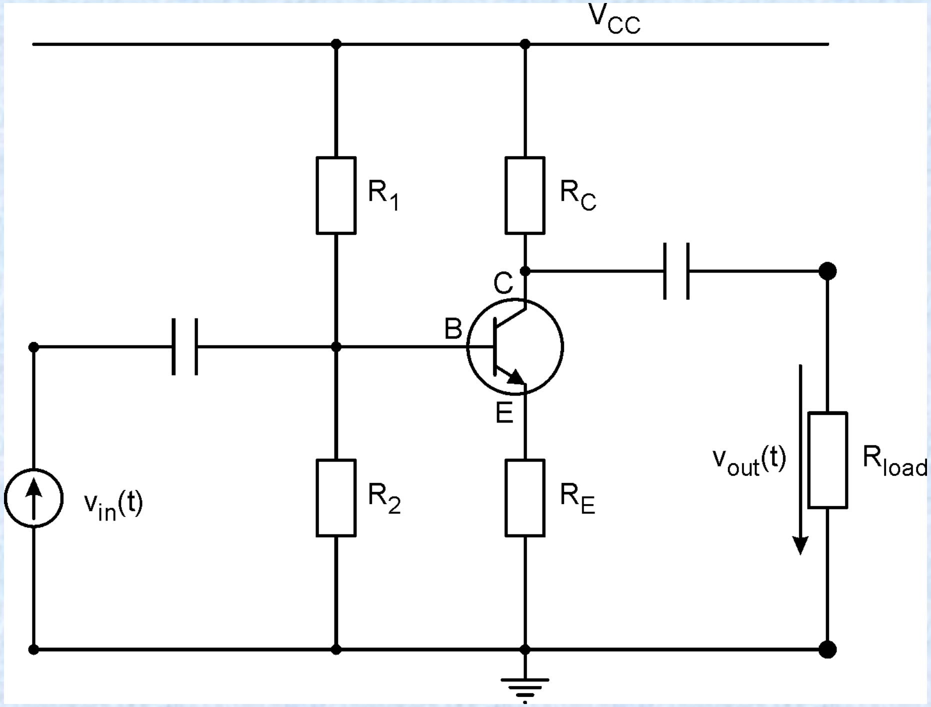
$$i_2(t) = I_{2\_DC} + i_{2\_AC}(t) = 0,0688\sqrt{2}\sin(2t + 76,58°)$$

$$i_3(t) = I_{3\_DC} + i_{3\_AC}(t) = 0,659 + 0,0309\sqrt{2}\sin(2t + 62,21°)$$

Bài tập: Tính các tín hiệu điện áp. Tính các công suất.

4.2. Phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc

Ví dụ mạch có transistor:



4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch phi tuyến có nhiều tần số

Trong mạch điện (tuyến tính hoặc phi tuyến) có nhiều tần số, công suất tiêu thụ (phát) của một đoạn mạch có điện áp là u(t) và dòng điện là i(t) vẫn được xác định như trường hợp tuyến tính!

$$u(t) = U_0 + U_1 \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + U_2 \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) + \ldots$$

$$i(t) = I_0 + I_1 \sin\left(\omega_1 t + \theta_1\right) + I_2 \sin\left(\omega_2 t + \theta_2\right) + \ldots$$

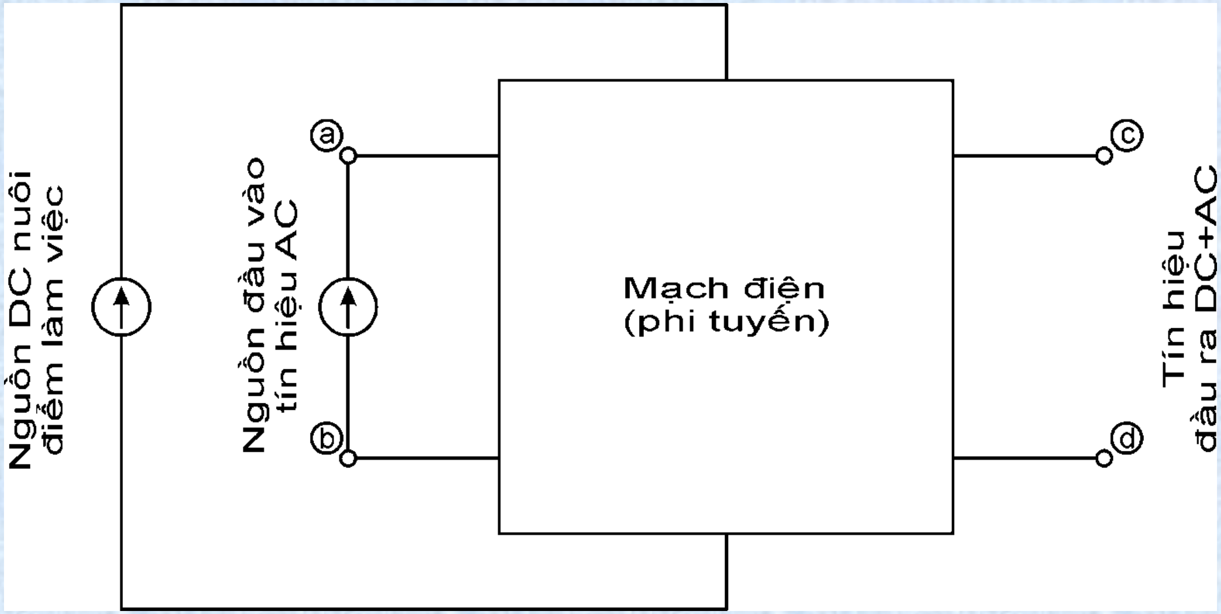
$$\rightarrow p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$\rightarrow P_{t.b\times nh} = P_{DC} + P_{\omega_1 t} + P_{\omega_2 t} + \ldots$$

$$\rightarrow P = U_0 I_0 + \frac{U_1}{\sqrt{2}} \frac{I_1}{\sqrt{2}} \cos\left(\varphi_1 - \theta_1\right) + \frac{U_2}{\sqrt{2}} \frac{I_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\varphi_2 - \theta_2\right) + \ldots$$

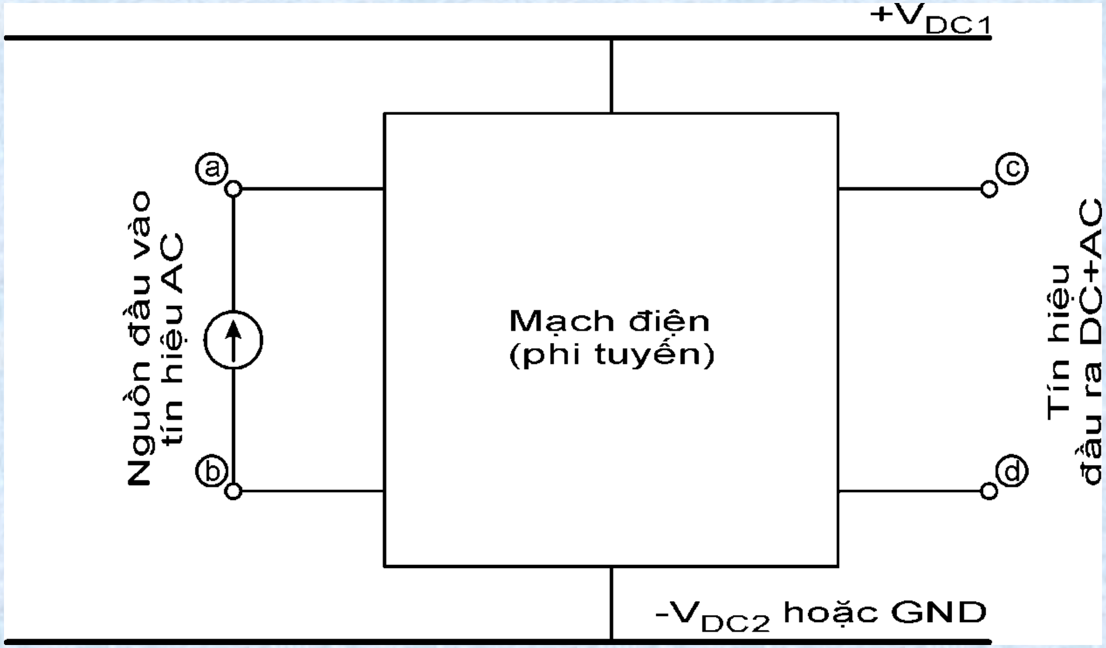
4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch phi tuyến có nhiều tần số

Phương pháp "đặt điểm làm việc" là một trong những nguyên lý cơ bản của mạch điện tử tương tự khi làm việc với các phần tử phi tuyến!



4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch phi tuyến có nhiều tần số

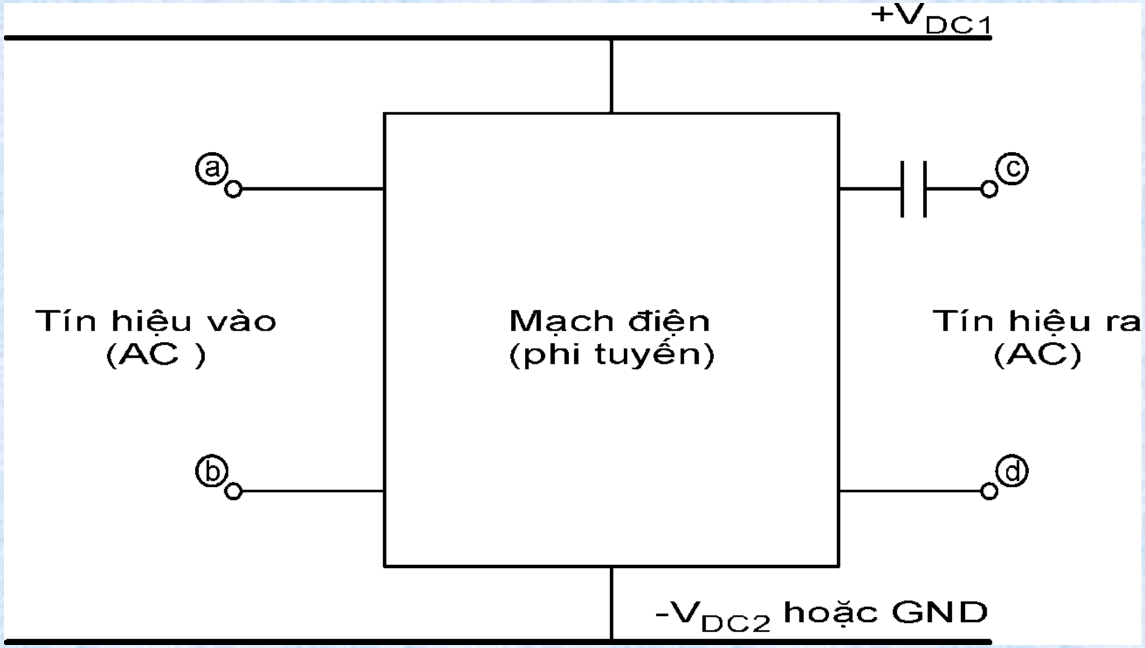
Để thuận tiện, có thể dùng ký hiệu các đường "trục" cấp nguồn hoặc đất:



4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch phi tuyến có nhiều tần số

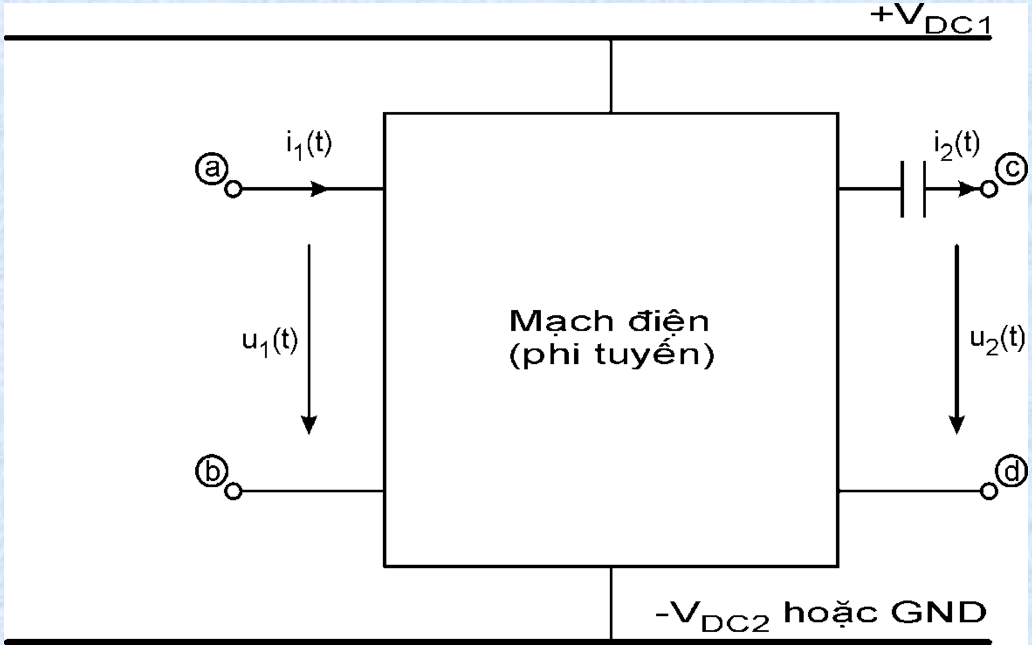
Ta thường mong muốn tín hiệu đầu ra chỉ chứa thành phần AC -> đặt thêm tụ "lọc" ở cổng ra!

Khi định nghĩa được cổng vào và cổng ra, ta sẽ có các định nghĩa về các hàm truyền đạt áp/dòng



4.3. Các hàm truyền đạt và công suất trong mạch phi tuyến có nhiều tần số

- Hàm truyền đạt áp: $k_u = \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \vee K_{\dot{U}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$
- Hàm truyền đạt dòng: $k_i = \frac{i_2(t)}{i_1(t)} \vee K_{\dot{I}} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$
- Hàm truyền đạt lai: $K_Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \vee K_Y = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$



Chương V: Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ

5.1. Các hiện tượng cơ bản

5.2. Các phương pháp giải mạch phi tuyến quá độ cơ bản

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

5.1. Các hiện tượng cơ bản

(Tương tự như đối với hiện tượng quá độ trong mạch tuyến tính)

- QTQĐ xảy ra khi trong mạch điện có:
  - Thay đổi về giá trị của phần tử
  - Thay đổi về bản chất của phần tử
  - Thay đổi về cấu trúc của mạch
- Hai dạng tín hiệu "*có quán tính*" trong mạch điện: dòng qua các cuộn dây và điện áp trên các tụ điện.
- Để xác định giá trị tức thời ngay sau quá độ: phối hợp hệ phương trình K với 2 định luật về bảo toàn điện tích và bảo tòan từ thông.

5.2. Các phương pháp giải mạch phi tuyến quá độ cơ bản

- Để giải mạch phi tuyến ở chế độ quá độ:
  – Lập hệ phương trình mạch (vi-tích phân, phi tuyến)
  – Xác định các “sơ kiện” (hay còn gọi là các điều kiện biên)
  – Sử dụng các phương pháp tóan học để giải hệ
- Các phương pháp khả thi trong tính toán thủ công:
  – Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn: Đưa bài toán phi tuyến về bài toán *tuyến tính tương đương* và dùng các công cụ tuyến tính để giải mạch.
  – Phương pháp sai phân: Là phương pháp phù hợp cho lập trình tính toán.
  – Phương pháp cân bằng điều hòa (đọc tham khảo)

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

(Sử dụng chung ý tưởng của phương pháp tuyến tính hóa xung quanh điểm làm việc)

- Khi điểm làm việc của 1 phần tử phi tuyến trượt trên một đoạn thẳng (hoặc một đoạn đặc tính rất ngắn) thì phần tử đó có thể thay tương đương bởi mô hình động *tuyến tính*
- Để áp dụng khả thi phương pháp ta có hai trường hợp:
  - Đặc tính cho theo bảng
  - Đoạn làm việc rất ngắn (trong quá trình quá độ, thành phần quá độ rất nhỏ so với thành phần xác lập trước và sau quá độ).

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

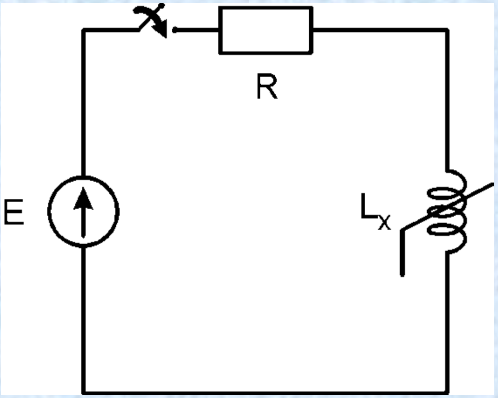
- Khi tại thời điểm t_0 1 cuộn dây hoặc 1 tụ điện phi tuyến bắt đầu trượt trên một đoạn (thẳng) làm việc mới, ta cần xác định giá trị tức thời ban đầu để tính sơ kiện cho quá trình đó.
- Phương pháp ảnh Laplace dùng sơ kiện (t_0-) (thuận tiện hơn so với các phương pháp sử dụng sơ kiện (t_0+) ví dụ như tích phân kinh điển, *các bước sai phân liên tiếp*,…)
- Nếu đi qua điểm giao giữa hai đoạn đặc tính, ta cần "chốt" các tín hiệu trước khi chuyển đổi sang đoạn đặc tính mới (như đã trình bày ở trên).

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

- Ví dụ tính toán: 1 phần tử phi tuyến + DC>>AC
- 1 phần tử phi tuyến + đặc tính bảng 2 đoạn
- 2 phần tử phi tuyến + đặc tính bảng 2 đoạn

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

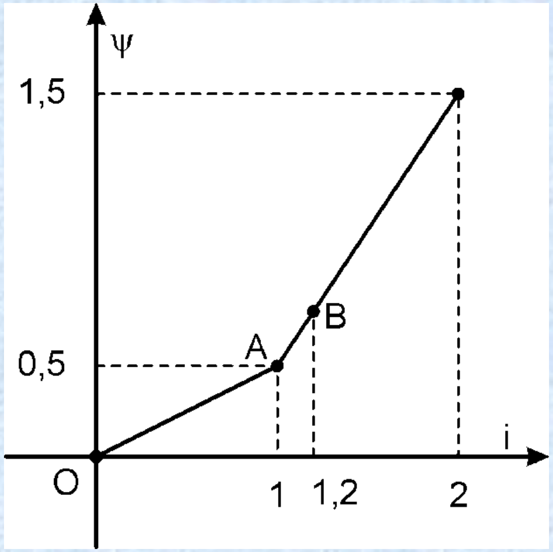
Ví dụ tính toán: Cho mạch R-L



$E = 12V; R = 10\Omega; L_x :$

Ψ(Wb)	**0**	**0,5**	**1,5**
i(A)	**0**	**1**	**2**

- Tại t=0: điểm làm việc của L_x tại gốc O
- Tại t=∞: điểm làm việc của L_x tại B(1,2; 0,7)
- Như vậy trong quá trình quá độ, điểm làm việc đã "trượt" từ O đến B dọc theo đường đặc tuyến (đi qua điểm nối A(1; 0,5)) → ta có hai đoạn thẳng là OA và AB → ta sẽ xét dần từng quá trình trên mỗi đoạn.

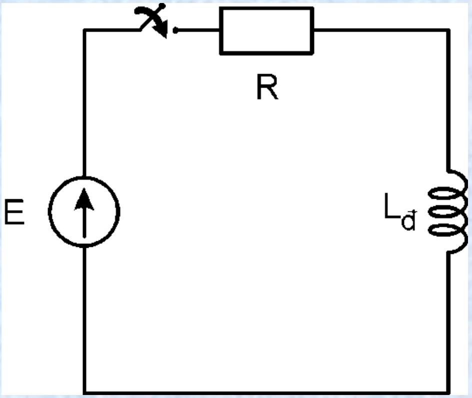


<u>*Đoạn thứ nhất (OA):*</u> Tại thời điểm bắt đầu (t=0) ta có $i_L(0-)=0$. Trên đoạn OA ta có:

$$\psi = 0,5i \rightarrow L_x \approx L_{®} = \psi'(i) = 0,5(H)$$

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Mạch đã cho tương đương với mạch tuyến tính R-L → nghiệm của phương trình (phương pháp Laplace, tích phân kinh điển,…):



$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 1,2\left(1 - e^{-20t}\right)$$

Thời điểm điểm làm việc của cuộn dây tới A (kết thúc đoạn OA):

$$i(t) = 1 \rightarrow t = t_A = 0,0896(s)$$

Sau đó, cuộn dây phi tuyến có điểm làm việc trượt trên đoạn AB:

$$\psi = i - 0,5 \rightarrow L_x \approx L_{®} = \psi'(i) = 1(H)$$

Sơ kiện ban đầu: $i_L(t_A) = i_L(0,0896) = 1$

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Để thuận tiện, có thể sử dụng phương pháp dịch trục thời gian: Đặt $t' = t - t_A$. Khi đó trên đoạn AB ($t' >= 0$) ta có (phương pháp Laplace, tích phân kinh điển,…)

$$i(t') = 1,2 - 0,2 \cdot e^{-10t'}$$

Quay về trục ban đầu: với $t >= t_A$

$$i(t) = 1,2 - 0,2 \cdot e^{-10(t - t_A)}$$

Tổng hợp nghiệm: dòng qua cuộn dây L bằng:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad t \le 0 \\ 1,2\left(1 - e^{-20t}\right) & khi \quad 0 \le t \le 0,0896 \\ 1,2 - 0,2 \cdot e^{-10(t - 0,0896)} & khi \quad t \ge 0,0896 \end{cases}$$

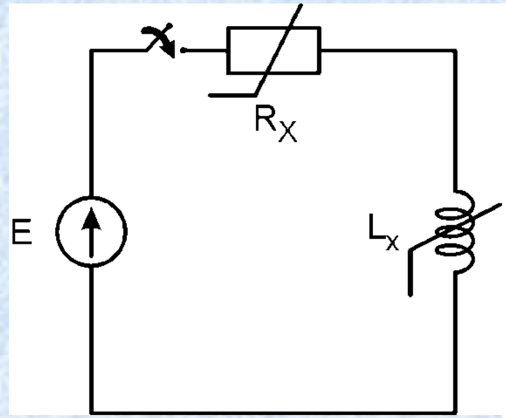
5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

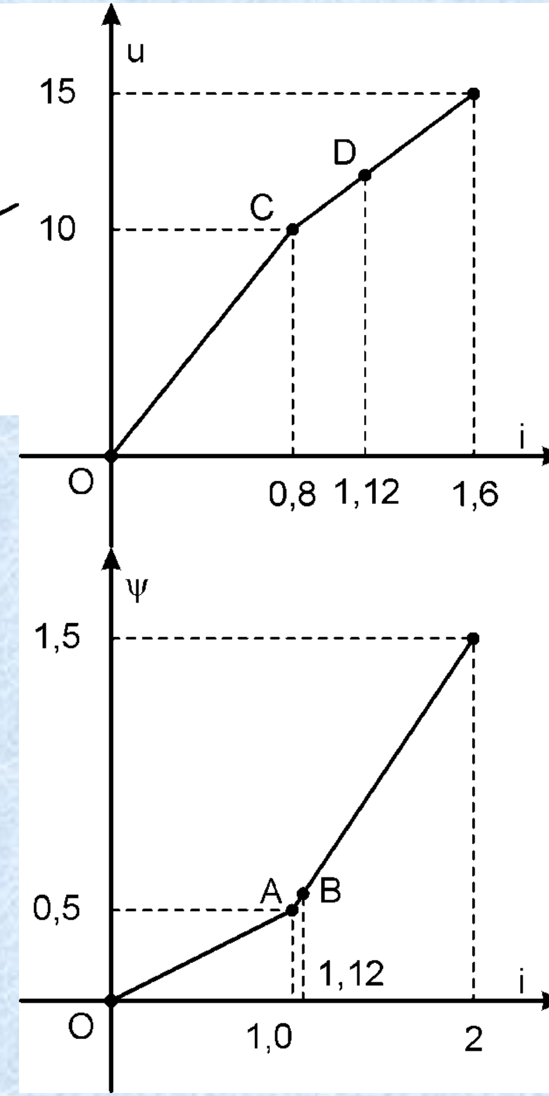
Ví dụ tính toán:

Cho mạch R-L với $E = 12V;$

Ψ(Wb)	**0**	**0,5**	**1,5**
i(A)	**0**	**1**	**2**

u(V)	**0**	**10**	**15**
i(A)	**0**	**0,8**	**1,6**





- Tại t=0: điểm làm việc của cuộn dây và điện trở tại gốc tọa độ O
- Tại t=∞: điểm làm việc của cuộn dây tại B(1,12; 0,62), của điện trở tại điểm D(1,12; 12)

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

- Như vậy trong quá trình quá độ, điểm làm việc của cuộn dây đã "trượt" từ O đến B dọc theo đường đặc tuyến (đi qua điểm nối A(1; 0,5)), điểm làm việc của điện trở đã trượt từ O đến D dọc theo đường đặc tuyến (đi qua điểm nối C(0,8; 10)) → ta sẽ xét dần từng quá trình trên mỗi đoạn.
- Trường hợp này ta sẽ có 3 đoạn: i<=0,8; 0,8<=i<=1; 1<i<=1,12. (trường hợp mạch phức tạp thì có thể khó khăn trong việc xác định rõ thứ tự các đoạn)

<u>Đoạn 1:</u> $\psi = 0.5 \cdot i \rightarrow L_x \approx L_{®} = \psi'(i) = 0,5(H)$

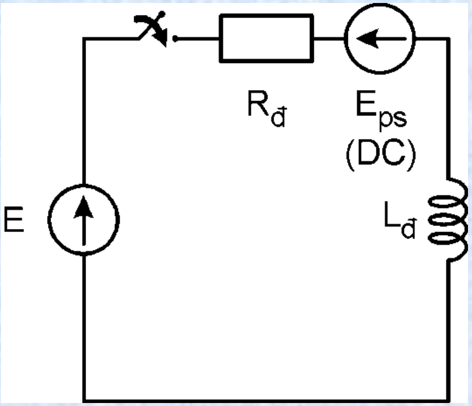
$$u = 12,5 \cdot i \rightarrow R_x \approx R_{®} = u'(i) = 12,5(\Omega)$$

Sơ kiện: $i_L(0-) = 0.$

Nghiệm: $i(t) = 0,96\left(1 - e^{-25t}\right)$

Kết thúc đoạn 1: $i(t) = 0,96\left(1 - e^{-25t_C}\right) = 0,8 \rightarrow t_C = 0,0717$

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn



<u>*Đoạn 2:*</u>

$$\psi = 0,5 \cdot i \to L_x \approx L_{\circledR} = \psi'(i) = 0,5(H)$$

$$u = 6,25 \cdot i + 5 \to R_x \approx \left(R_{\circledR} = u'(i) = 6,25\right) + \left(E_{ps} = 5\right)$$

Sơ kiện: $i_L(0-) = 0,8$

Dịch gốc thời gian: $t' = t - 0,0717$

Nghiệm:

$$I(p) = \frac{\frac{12}{p} - \frac{5}{p} + 0,4}{6,25 + 0,5p} = \frac{0,8p + 14}{p(p + 12,5)} \to i(t') = 1,12 - 0,32 \cdot e^{-12,5t'}$$

Kết thúc đoạn 2: $i(t') = 1,12 - 0,32 \cdot e^{-12,5t'_A} = 1 \to t'_A = 0,0785 \to t_A = 0,15$

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

<u>*Đoạn 3:*</u> $\psi = i - 0,5 \rightarrow L_x \approx L_{\circledR} = \psi'(i) = 1(H)$

$$u = 6,25 \cdot i + 5 \rightarrow R_x \approx \left(R_{\circledR} = u'(i) = 6,25\right) + \left(E_{ps} = 5\right)$$

Sơ kiện: $i_L(0-) = 1$

Dịch gốc thời gian: $t'' = t - 0,15$

Nghiệm:

$$I(p) = \frac{\frac{12}{p} - \frac{5}{p} + 1}{6,25 + p} = \frac{p+7}{p(p+6,25)} \rightarrow i(t'') = 1,12 - 0,12 \cdot e^{-6,25t''}$$

Tổng hợp nghiệm:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad t \le 0 \\ 0,96\left(1 - e^{-25t}\right) & khi \quad 0 \le t \le 0,0717 \\ 1,12 - 0,32 \cdot e^{-12,5(t-0,0717)} & khi \quad 0,0717 \le t \le 0,15 \\ 1,12 - 0,12 \cdot e^{-6,25(t-0,15)} & khi \quad t \ge 0,15 \end{cases}$$

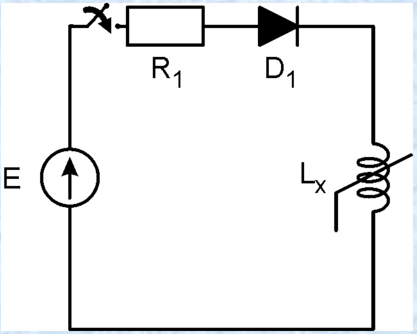
5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Bài tập:

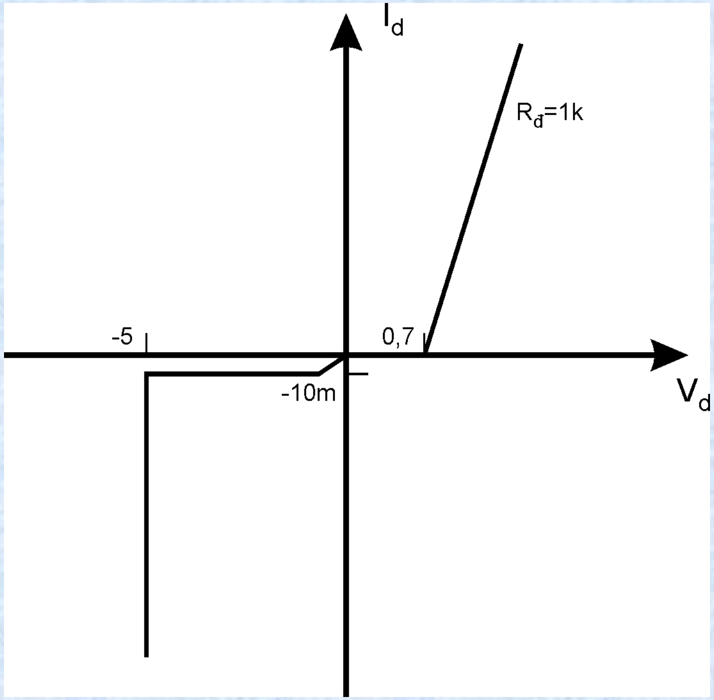
$E = 12V; R_1 = 8\Omega;$

Cuộn dây phi tuyến có đặc tính cho theo bảng:

Ψ(Wb)	**0**	**0,5**	**1,5**
i(A)	**0**	**1**	**2**



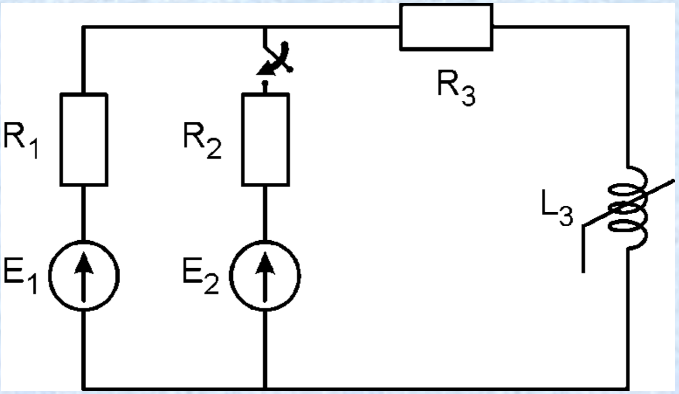
Diode có đặc tính cho theo đồ thị



5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Ví dụ tính toán: *(đoạn làm việc rất nhỏ)*

Cho mạch điện như hình bên, tại t=0 đóng nhánh nguồn E_2.



$$E_1 = 12V; R_1 = 4\Omega; E_2 = 1V; R_2 = 6\Omega; R_3 = 8\Omega;$$

$$L_3 : \psi = 2i + 0,5i^3$$

- Tại t=0: điểm làm việc của L_3

$$i = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{12}{12} = 1;$$

- Tại t=∞: điểm làm việc của L_3 (sử dụng nguồn tương đương T-N)

$$i = \frac{E_{Th}}{R_{ab} + R_3} = \frac{7,6}{2,4 + 8} = 0,731;$$

Coi đoạn dịch chuyển từ 1 → 0,731 là "*đủ nhỏ*" để có thể xấp xỉ bằng một đoạn thẳng. Khi đó ta thường lấy xấp xỉ là đoạn tiếp tuyến tại *điểm đầu*.

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

- Tiếp tuyến tại i=1 của đường đặc tính của cuộn dây phi tuyến tương ứng với cuộn dây tuyến tính có hệ số góc:

$$L_{®} = \psi'(i=1) = 2 + 1,5i^2 = 3,5.$$

Quá trình quá độ của mạch phi tuyến khi đó được xấp xỉ với quá trình quá độ trên mạch tuyến tính tương đương.

Hằng số thời gian:

$$\tau = \frac{L_{®}}{R_{t®}} = \frac{3,5}{2,4+8} = 0,324 \rightarrow \frac{1}{\tau} = 3,086$$

Nghiệm của quá trình quá độ:

$$i = A + Be^{-3,086t} = 0,731 + 0,269e^{-3,086t}$$

- Ví dụ cho mạch transistor

5.3. Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn

Nhận xét về phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn:

- Số lượng trường hợp chia nhỏ có thể lớn nếu đoạn làm việc dịch chuyển qua nhiều đoạn và có nhiều phần tử phi tuyến,
- Khó thực hiện cho trường hợp đặc tính cho theo hàm và dịch chuyển theo đoạn dài.
- …

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Ý tưởng của phương pháp:

- Không đặt vấn đề xác định hàm chính xác u(t), i(t) mà chỉ cần *<u>ước lượng</u>* giá trị tín hiệu tại một số điểm rời rạc t_0, t_1, t_2,…
- Trong thực tế khi các điểm này có mật độ cao ta có thể có "hình ảnh" của tín hiệu tương đối chính xác.
- Giới hạn thêm (để đơn giản các ví dụ tính toán): các mốc thời gian được đặt cách đều, cụ thể

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \ldots = h$$
$$\rightarrow t_k = t_0 + k \cdot h$$

với *h* – bước sai phân.

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

- Sử dụng công thức sai phân bậc nhất: Với *h* đủ nhỏ:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \\
&\simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\
&\simeq \ldots
\end{aligned}
$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

- Sử dụng công thức sai phân bậc hai:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

$$\simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$\simeq \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

- Để mở rộng: Lưu ý các hệ số trong công thức khai triển nhị thức Newton $(a-b)^n$ để xây dựng công thức sai phân bậc *n*.

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Các bước cụ thể của thuật toán:

1. Lập hệ phương trình Kirchhoff của mạch điện ***sau*** thời điểm quá độ (hỗ trợ cho bước 2, không bắt buộc)
2. ***Xác định các biến (đặc trưng) và lập hệ phương trình cho các biến (đặc trưng) đó trong mạch*** sau ***thời điểm quá độ (thường xuất phát từ các phương trình Kirchhoff).***
3. Sai phân hóa hệ phương trình các biến (đặc trưng)
4. Xây dựng công thức lặp tính các biến (đặc trưng)
5. Xác định các giá trị sơ kiện *(t_0+)* và sử dụng công thức lặp để tính các bước tiếp theo.

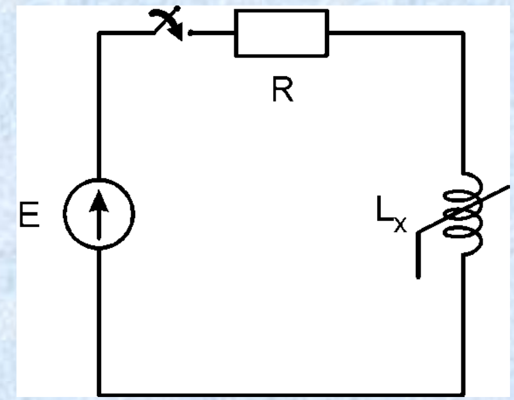
Chú ý: Để thuận tiện cho việc xác định các sơ kiện, ta thường sử dụng các biến đặc trưng là dòng qua các cuộn dây và điện áp trên các tụ điện!

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

1. Ví dụ mạch bậc 1 (+ tính các tín hiệu không phải biến đặc trưng)
2. Ví dụ sơ kiện khác 0
3. Ví dụ sơ kiện AC
4. Ví dụ sơ kiện xếp chồng
5. Ví dụ mạch bậc 2
6. Trình bày về phương pháp giải bằng sai phân bậc 2
7. Trình bày về phương pháp giải bằng các biến khác
8. …

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

1. Ví dụ mạch bậc 1:



Cho mạch R-L với: $E = 12V; R = 10\Omega; L_x : \psi = 2i + 0,5i^3$

a) Tính 5 bước giá trị đầu tiên của $i_L(t)$ với h=0,05s

b) Tính 5 bước giá trị đầu tiên của $u_L(t)$.

Bước 1: Hệ phương trình Kirchhoff

$$u_R(t) + u_L(t) - E = 0$$

Bước 2: Hệ phương trình biến đặc trưng (dòng i_L)

$$R \cdot i_L(t) + \frac{d\psi}{dt} - E = 0 \rightarrow R \cdot i_L(t) + \frac{d\psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} - E = 0$$

$$\rightarrow 10 \cdot i_L(t) + \left(2 + 1,5i_L^2(t)\right) \cdot \frac{di_L}{dt} - 12 = 0$$

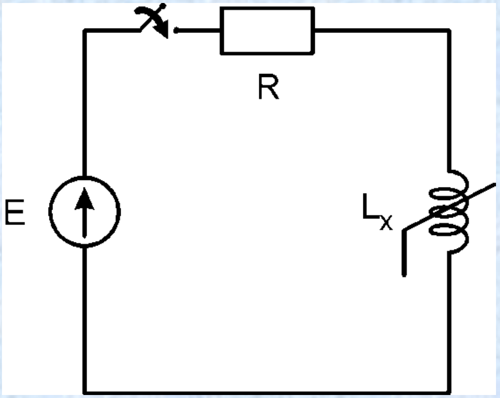
Bước 3: Sai phân hóa (hệ phương trình từ bước 2)

$$10 \cdot i_L(t) + \left(2 + 1,5i_L^2(t)\right) \cdot \frac{i_L(t+h) - i_L(t)}{h} - 12 = 0$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 4: Công thức lặp

$$i_L(t+h) = \frac{12 - 10 \cdot i_L(t)}{2 + 1,5 i_L^2(t)} \cdot h + i_L(t)$$



Bước 5: Sơ kiện và các bước kết quả

$$i_L(0-) = 0 \rightarrow i_L(0+) = 0$$

$$\rightarrow i_L(h) = 0,3$$

$$\rightarrow i_L(2h) = 0,511$$

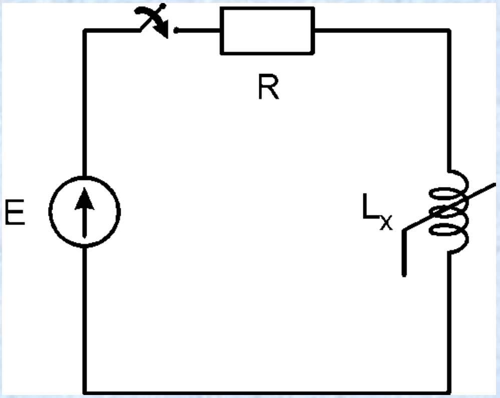
$$\rightarrow i_L(3h) = 0,655$$

$$\rightarrow i_L(4h) = 0,758$$

$$\rightarrow \ldots$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

b) Sau khi đã tính các biến đặc trưng, ta có thể tính các tín hiệu còn lại trong mạch theo các biến đặc trưng.



$$u_L(t) = -R \cdot i_L(t) + E = -10 \cdot i_L(t) + 12$$

$$i_L(h) = 0,3 \quad \rightarrow \quad u_L(h) = 9$$

$$i_L(2h) = 0,511 \quad \rightarrow \quad u_L(2h) = 6,89$$

$$i_L(3h) = 0,655 \quad \rightarrow \quad u_L(3h) = 5,45$$

$$i_L(4h) = 0,758 \quad \rightarrow \quad u_L(4h) = 4,42$$

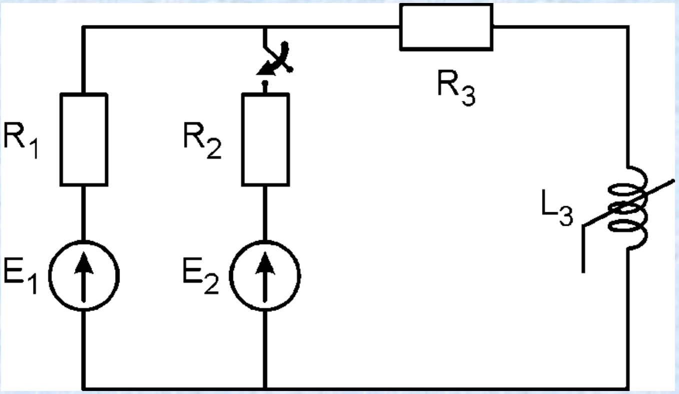
$$\rightarrow ...$$

<u>Bài tập:</u> Giải bài trên khi:

1. Đặc tính cuộn dây cho theo bảng.
2. Thay nguồn E (DC) bằng nguồn e(t) (AC)

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

2. Ví dụ mạch bậc 1 với sơ kiện khác 0:



Tính 5 bước giá trị đầu tiên của $i_{L3}(t)$ khi khóa đóng vào tại t=0 trong mạch bên. Biết bước h=0,05s và:

$$E_1 = 12V; R_1 = 10\Omega; E_2 = 15V; R_2 = 6\Omega;$$

$$R_3 = 5\Omega; L_3 : \psi = 2i + 0,5i^3$$

Bước 1: Hệ phương trình Kirchhoff (cho mạch ***sau*** thời điểm quá độ + đơn giản hóa bằng Thé-ve-nin – Norton:

$$u_{Rab}(t) + u_{L3}(t) - E_{Th} = 0$$

với:

$$R_{ab} = \left(R_1 \| R_2\right) + R_3 = 8,75; E_{Th} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = 13,875.$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 2: Hệ phương trình biến đặc trưng (dòng i_L)

$$R_{ab} \cdot i_{L3}(t) + \frac{d\psi}{di_{L3}} \cdot \frac{di_{L3}}{dt} - E_{Th} = 0$$

$$\rightarrow 8,75 \cdot i_{L3}(t) + \left(2 + 1,5 i_{L3}^2(t)\right) \cdot \frac{di_{L3}}{dt} - 13,875 = 0$$

Bước 3: Sai phân hóa

$$8,75 \cdot i_{L3}(t) + \left(2 + 1,5 i_{L3}^2(t)\right) \cdot \frac{i_{L3}(t+h) - i_{L3}(t)}{h} - 13,875 = 0$$

Bước 4: Công thức lặp

$$i_{L3}(t+h) = \frac{13,875 - 8,75 \cdot i_{L3}(t)}{2 + 1,5 i_{L3}^2(t)} \cdot h + i_{L3}(t)$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 5: Sơ kiện và các bước kết quả

$$i_{L3}(0-) = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 0,8 \rightarrow i_{L3}(0+) = 0,8$$

$$\rightarrow i_{L3}(h) = 0,916$$

$$\rightarrow i_{L3}(2h) = 1,006$$

$$\rightarrow i_{L3}(3h) = 1,078$$

$$\rightarrow i_{L3}(4h) = 1,137$$

$$\rightarrow ...$$

Bài tập: 1. Tính một số tín hiệu khác trong mạch điện.

2. Giải lại nếu tại điểm t=0 khóa K <u>*mở ra*</u>.

3. Giải lại không sử dụng mạch tương đương Thé-ve-nin – Norton

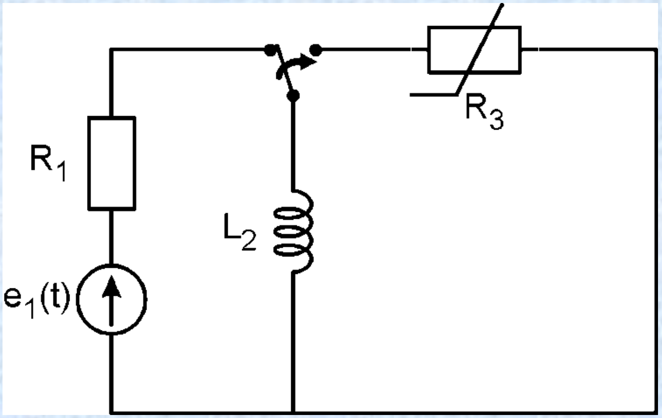
5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

3. Ví dụ mạch có sơ kiện AC:

Cho mạch bên với: $e_1(t) = 12\sin(10t)V; R_1 = 10\Omega;$

$L_2 = 0,5H; R_3 : u = 7i + 0,5i^3$

Tính 5 bước giá trị đầu tiên của $i_{L2}(t)$ với bước h=0,05s



Bước 1: Hệ phương trình Kirchhoff (chiều dòng ngược chiều kim đồng hồ)

$$u_{L2}(t) + u_{R3}(t) = 0$$

Bước 2: Hệ phương trình biến đặc trưng (dòng i_L)

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + \left(7i_{L2}(t) + 0,5i_{L2}^3(t)\right) = 0$$

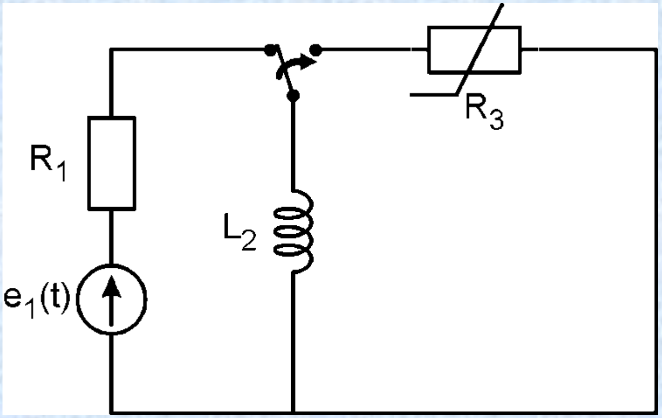
Bước 3: Sai phân hóa

$$L_2 \frac{i_{L2}(t+h) - i_{L2}(t)}{h} + \left(7i_{L2}(t) + 0,5i_{L2}^3(t)\right) = 0$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 4: Công thức lặp

$$i_{L2}(t+h) = -\frac{7i_{L2}(t) + 0,5i_{L2}^3(t)}{L_2}h + i_{L2}(t)$$



Bước 5: Sơ kiện từ mạch AC và các bước lặp

$$\dot{I}_{L2} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + Z_{L2}} = \frac{6\sqrt{2}\measuredangle 0^\circ}{10 + j5} = 0,759\measuredangle -26,57^\circ$$

$$\to i_{L2}(t) = 0,759\sqrt{2}\sin(10t - 26,57^\circ)$$

$$\to i_{L2}(0-) = 0,759\sqrt{2}\sin(-26,57^\circ) = -0,48 \to i_{L2}(0+) = -0,48$$

$$\to i_{L2}(h) = -0,138$$

$$\to i_{L2}(2h) = -0,0412$$

$$\to i_{L2}(3h) = -0,0124$$

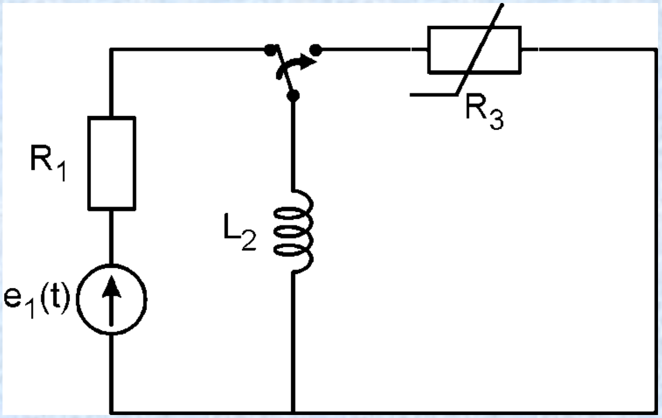
$$\to i_{L2}(4h) = -0,00372$$

$$\to \ldots$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bài tập:

1. Giải lại khi mạch sơ kiện có nhiều thành phần tần số (ví dụ thêm nguồn DC vào nhánh L_2).
2. Vấn đề xảy ra khi L_2 là phi tuyến?



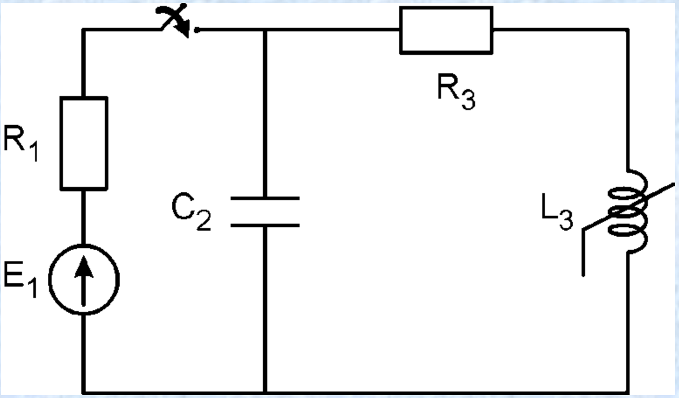
5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

4. Ví dụ mạch bậc 2:

Cho mạch bên với: $E_1 = 12V; R_1 = 10\Omega;$

$C_2 = 0,01F; R_3 = 5\Omega; L_3 : \psi = 2i + 0,5i^3$

Tính 5 bước giá trị đầu tiên của $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$ với bước h=0,05s



Bước 1: Hệ phương trình Kirchhoff

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) & (1) \\ u_{C2}(t) - E_1 + u_{R1}(t) = 0 & (2) \\ u_{R3}(t) + u_{L3}(t) - u_{C2}(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

Bước 2: Hệ phương trình cho hai biến đặc trưng $u_{C2}(t)$ và $i_{L3}(t)$

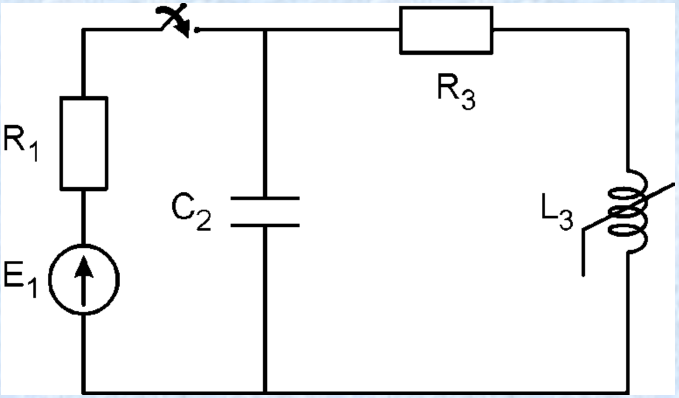
$$(2) \to u_{C2}(t) - E_1 + R_1 \cdot i_1(t) = 0 \xrightarrow{(1)} u_{C2}(t) - E_1 + R_1 \cdot \left(i_2(t) + i_3(t)\right) = 0$$

$$\to u_{C2}(t) + R_1 \cdot C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + R_1 \cdot i_3(t) = E_1 \qquad (4)$$

$$(3) \to R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1,5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{di_3}{dt} - u_{C2}(t) = 0 \qquad (5)$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 3: Sai phân hóa



$$\begin{cases} u_{C2}(t) + R_1 \cdot C_2 \dfrac{du_{C2}}{dt} + R_1 \cdot i_3(t) = E_1 & (4) \\ R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \dfrac{di_3}{dt} - u_{C2}(t) = 0 & (5) \end{cases}$$

$$(4) \rightarrow u_{C2}(t) + R_1 C_2 \cdot \frac{u_{C2}(t+h) - u_{C2}(t)}{h} + R_1 \cdot i_3(t) = E_1 \qquad (6)$$

$$(5) \rightarrow R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{i_3(t+h) - i_3(t)}{h} - u_{C2}(t) = 0 \qquad (7)$$

Bước 4: Công thức lặp cho các biến đặc trưng

$$(6) \rightarrow u_{C2}(t+h) = \frac{E_1 - u_{C2}(t) - R_1 \cdot i_3(t)}{R_1 C_2} \cdot h + u_{C2}(t) \qquad (8)$$

$$(7) \rightarrow i_3(t+h) = \frac{u_{C2}(t) - R_3 \cdot i_3(t)}{2 + 1{,}5 i_3^2(t)} \cdot h + i_3(t) \qquad (9)$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 5: Sơ kiện và các giá trị lặp

$$\begin{cases} u_{C2}(0-) = 0 \\ i_3(0-) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{C2}(0+) = 0 \\ i_3(0+) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{C2}(h) = \dots \\ i_3(h) = \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{C2}(2h) = \dots \\ i_3(2h) = \dots \end{cases} \rightarrow \dots$$

Chú ý: Để có các giá trị của các bước sau, ta cần cả hai giá trị của biến đặc trưng ở bước liền trước đó!

Bài tập: Giải các trường hợp mạch bậc hai khác (L-L, C-C, L-C) với các phần tử phi tuyến khác nhau.

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

<u>*Chú ý:*</u> Đối với các mạch bậc cao, để tính 1 tín hiệu, ta có thể chuyển hệ *N* phương trình cho *N* biến đặc trưng về 1 phương trình ***bậc N*** cho tín hiệu cần tìm. Tuy nhiên thực tế cho thấy cách này làm tăng đáng kể khối lượng tính toán, đặc biệt ở phần công thức lặp và tính toán các sơ kiện.

Với ví dụ trên: nếu ta muốn đưa về phương trình bậc 2 theo $i_3(t)$:

$$(5) \rightarrow u_{C2}(t) = R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{di_3}{dt}$$

$$(4) \rightarrow \quad R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{di_3}{dt}$$

$$+ R_1 \cdot C_2 \cdot \frac{d}{dt}\left[R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{di_3}{dt}\right] + R_1 \cdot i_3(t) = E_1$$

$$\rightarrow \left(R_1 + R_3\right) i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t) + R_1 R_3 C_2\right] \frac{di_3}{dt} + R_1 C_2 \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \frac{d^2 i_3}{dt^2} = E_1$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Sai phân hóa:

$$\left(R_1+R_3\right)i_3(t)+\left[2+1,5i_3^2(t)+R_1R_3C_2\right]\frac{i_3(t+h)-i_3(t)}{h}$$

$$+R_1C_2\left[2+1,5i_3^2(t)\right]\frac{i_3(t+2h)-2i_3(t+h)+i_3(t)}{h^2}=E_1$$

Công thức lặp:

$$i_3(t+2h)=\frac{E_1-\left(R_1+R_3\right)i_3(t)-\left[2+1,5i_3^2(t)+R_1R_3C_2\right]\cdot\frac{i_3(t+h)-i_3(t)}{h}}{R_1C_2\left[2+1,5i_3^2(t)\right]}\cdot h^2+2i_3(t+h)-i_3(t)$$

Để dùng được công thức lặp trên, ta cần ***2*** giá trị ban đầu $i_3(0)$ và $i_3(h)$:

$$i_3(0-)=0\rightarrow i_3(0+)=0;$$

$$(3)\xrightarrow{t=0}R_3i_3(0)+\left[2+1,5i_3^2(0)\right]\frac{i_3(h)-i_3(0)}{h}-u_{C2}(0)=0$$

$$\rightarrow i_3(h)=i_3(0)=0.$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Từ hai giá trị ban đầu:

$$i_3(0), i_3(h) \to i_3(2h)$$
$$i_3(h), i_3(2h) \to i_3(3h)$$
$$i_3(2h), i_3(3h) \to i_3(4h)$$
$$\dots$$

Khi xây dựng hệ phương trình cho các biến đặc trưng khác với $i_L(t)$ và $u_C(t)$ ta không được đảm bảo điều kiện biến thiên liên tục

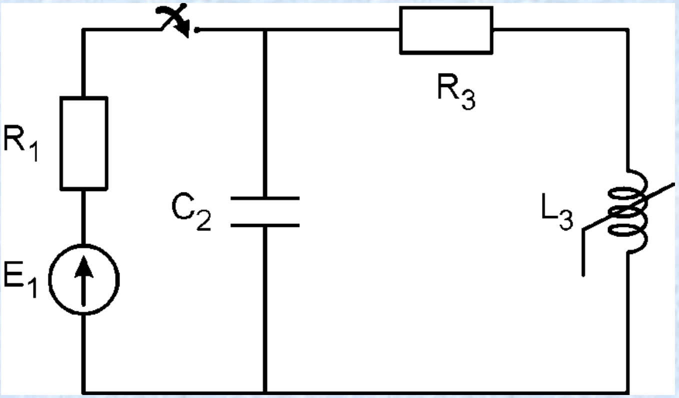
$$i_L(0-) = i_L(0+); u_C(0-) = u_C(0+);$$

nên việc xác định sơ kiện còn phức tạp hơn nữa.

__Câu hỏi:__ Khi nào thì giá trị của $i_L(t)$ và $u_C(t)$ không biến thiên liên tục?
Thực tế thường xảy ra như thế nào?

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

5. Ví dụ mạch bậc 2 với các biến khác



Cho mạch bên với: $E_1 = 12V; R_1 = 10\Omega;$

$C_2 = 0,01F; R_3 = 5\Omega; L_3 : \psi = 2i + 0,5i^3$

Tính 5 bước giá trị đầu tiên của i_{R1}(t) và i_{L3}(t) với bước h=0,05s

Bước 2: Hệ phương trình cho hai biến đặc trưng i_{R1} (t) và i_{L3}(t)

$$u_{C2}(t) = -R_1 \cdot i_1(t) + E_1 \rightarrow i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = -R_1 C_2 \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\rightarrow i_{L3}(t) - i_{R1}(t) = -R_1 C_2 \cdot \frac{di_1}{dt} \qquad (1)$$

$$R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1,5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{di_3}{dt} - E_1 + R_1 \cdot i_1(t) = 0 \qquad (2)$$

5.4. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Bước 3: Sai phân hóa

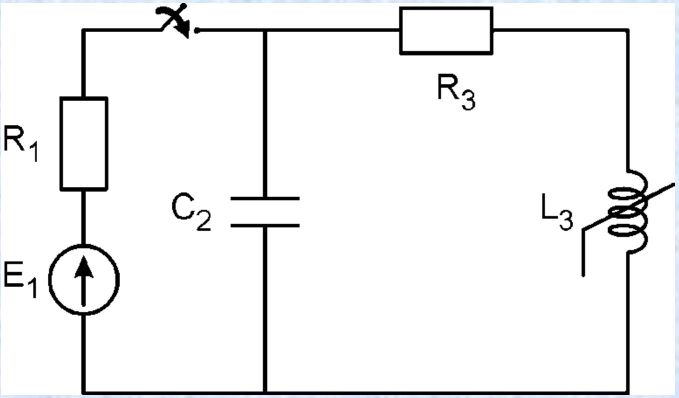
$$(1) \to i_{L3}(t) - i_{R1}(t) = -R_1 C_2 \cdot \frac{i_1(t+h) - i_1(t)}{h}$$

$$(2) \to R_3 \cdot i_3(t) + \left[2 + 1{,}5 i_3^2(t)\right] \cdot \frac{i_3(t+h) - i_3(t)}{h} - E_1 + R_1 \cdot i_1(t) = 0$$

Bước 4: Công thức lặp

$$(1) \to i_1(t+h) = -\frac{i_{L3}(t) - i_{R1}(t)}{R_1 C_2} \cdot h + i_1(t)$$

$$(2) \to i_3(t+h) = \frac{E_1 - R_1 \cdot i_1(t) - R_3 \cdot i_3(t)}{2 + 1{,}5 i_3^2(t)} \cdot h + i_3(t)$$



Bước 5: Sơ kiện và các giá trị

$$u_{C2}(t) = -R_1 \cdot i_1(t) + E_1 \to i_1(0+) = \frac{E_1 - u_{C2}(0+)}{R_1} = \frac{E_1 - u_{C2}(0-)}{R_1} = 1{,}2$$

$$i_{L3}(0+) = i_{L3}(0-) = 0$$

Tóm tắt nội dung phần III

1. Các phần tử và các hiện tượng cơ bản trong mạch phi tuyến:
2. Chế độ xác lập:
   - Nguồn DC: chế độ hằng (phương pháp dò ngược, đồ thị,….)
   - Nguồn AC: chế độ dừng (phương pháp cân bằng điều hòa, phương pháp điều hòa tương đương)
   - Xếp chồng: phương pháp tuyến tính hóa x/q điểm làm việc

Tóm tắt nội dung phần III

Phần III: Mạch phi tuyến (xác lập, quá độ)

3. Chế độ quá độ:
   - Phương pháp tuyến tính hóa: xung quanh điểm làm việc, xung quanh điểm cân bằng
   - Phương pháp các bước sai phân
   - Phương pháp cân bằng điều hòa

Phần IV: Đường dây dài

Chương VI: Các khái niệm, hiện tượng và các hệ phương trình đặc trưng cơ bản

Chương VII: Đường dây dài ở chế độ truyền công suất

Chương VIII: Đường dây dài ở chế độ truyền sóng

Chương VI: Các khái niệm, hiện tượng và các hệ phương trình đặc trưng cơ bản

6.1. Các hiện tượng cơ bản

6.2. Các thông số đặc trưng cơ bản của đường dây dài

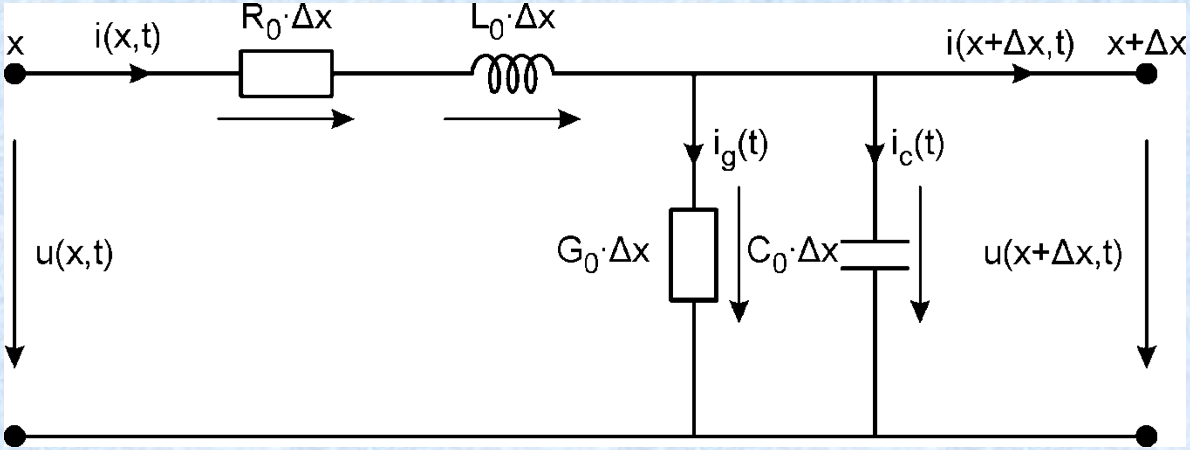
6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

6.1. Các hiện tượng cơ bản

- Đường dây dài (mạch có thông số rải) có một số hiện tượng, hiệu ứng mà ta đã tạm bỏ qua khi xem xét các mạch điện trước đây.
- Khi mạch đủ "dài", ta phải xem xét thêm một số hiện tượng trong mạch.
- Độ "dài" của mạch được so sánh với bước sóng của tín hiệu trong mạch:
    - >=5%: Bắt buộc xét
    - >=1%: Nên xét
    - <1%: Không bắt buộc.
- So với đường dây dài, các phần tử mạch "ngắn" được gọi là *phần tử tập trung*, các mạch "ngắn" được gọi là *mạch tập trung*.

6.1. Các hiện tượng cơ bản

- Có nhiều mô hình và phương pháp mô tả các hiệu ứng của đường dây dài, trong môn học LTM2 sẽ sử dụng mô hình 4 thông số.



6.2. Các thông số đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- 4 thông số cơ bản của đường dây:
  - R_0 (Ω/đơn vị dài): điện trở riêng dọc đường dây.
  - L_0 (H/đơn vị dài): điện cảm riêng dọc đường dây.
  - G_0 (S/đơn vị dài): điện dẫn riêng ngang đường dây.
  - C_0 (F/đơn vị dài): điện dung riêng ngang đường dây.
- Phương pháp tính toán các thông số: Môn học *Lý thuyết trường điện từ* cho từng cấu hình đường dây truyền tải.

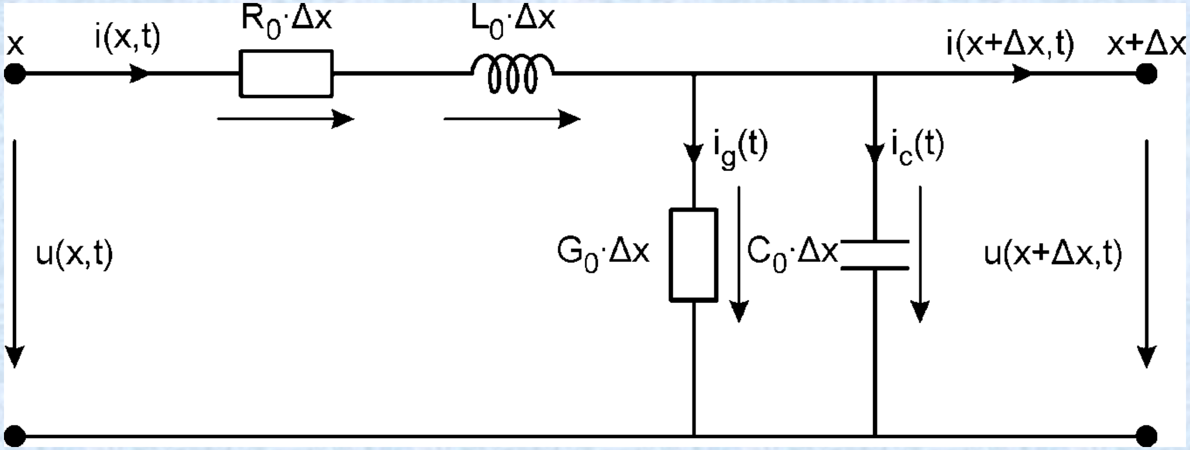
6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Bài toán giải mạch Đường dây dài: Tìm các tín hiệu u(x,t) và i(x,t) trong mạch.
- Chú ý tới sự phụ thuộc của hàm tín hiệu vào *vị trí* trên đường dây dài.
- Để tìm các tín hiệu ta sẽ xây dựng các hệ phương trình mạch, trong đó chú ý tới:
  - Ở chế độ xác lập: tập trung cho tín hiệu xoay chiều điều hòa hình sin
  - Ở chế độ quá độ: tập trung cho trường hợp đường dây dài không tiêu tán ($R_0=G_0=0$).

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

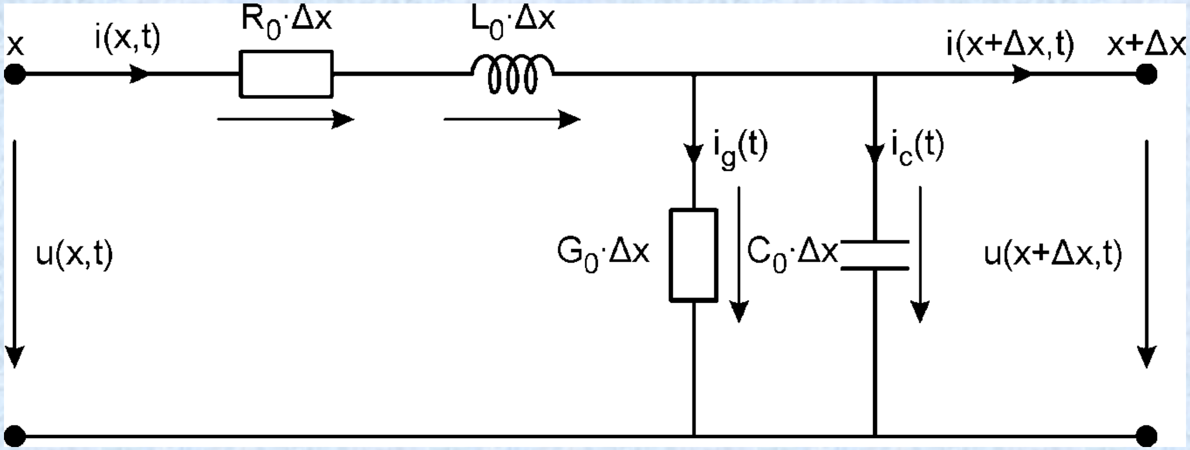
- Để lập hệ phương trình mạch, ta sử dụng một đoạn đường dây ngắn (Δx<<l, Δx<<5%λ) nên mạch đó vẫn được coi là mạch *tập trung*)

$$R = R_0 \cdot \Delta x; L = L_0 \cdot \Delta x;\ G = G_0 \cdot \Delta x; C = C_0 \cdot \Delta x;$$



Chú ý: Còn một số phương pháp mô tả kiểu khác, nhưng cũng dẫn tới các kết quả tương tự.

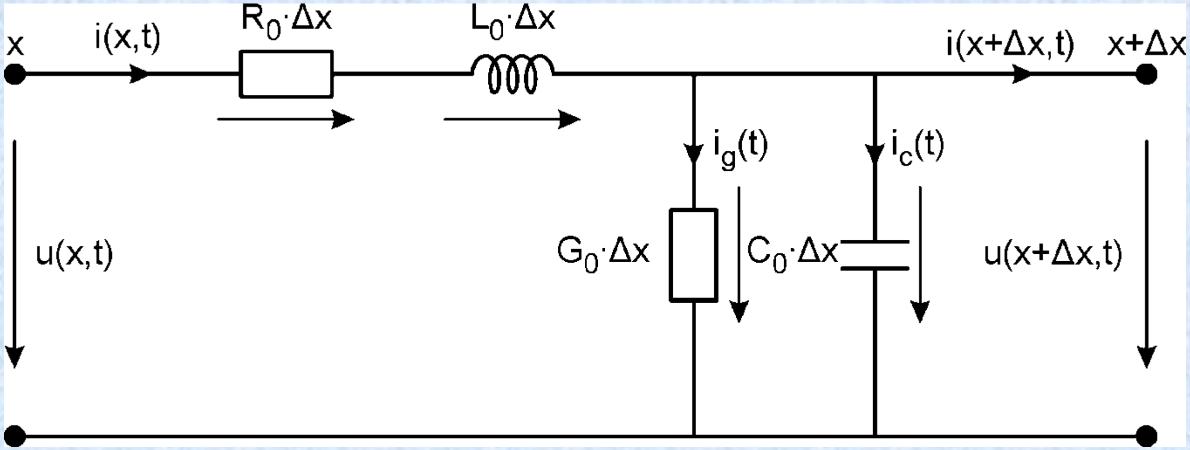
6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài



- Biểu diễn các tín hiệu đầu ra theo các tín hiệu đầu vào và thông số mạch điện:

$$\begin{cases} u(x+\Delta x,t) = u(x,t) - u_R(t) - u_L(t) & (1) \\ i(x+\Delta x,t) = i(x,t) - i_G(t) - i_C(t) & (2) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài



- Biểu diễn các tín hiệu đầu ra theo các tín hiệu đầu vào và thông số mạch điện:

$$\begin{cases} u(x+\Delta x,t) = u(x,t) - (R_0 \cdot \Delta x)\cdot i(x,t) - (L_0 \cdot \Delta x)\cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & (3) \\ i(x+\Delta x,t) = i(x,t) - (G_0 \cdot \Delta x)\cdot u(x+\Delta x,t) - (C_0 \cdot \Delta x)\cdot \dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Chuyển về dạng sai phân

$$\begin{cases} \dfrac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = -R_0 \cdot i(x,t) - L_0 \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & (5) \\ \dfrac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x} = -G_0 \cdot u(x+\Delta x,t) - C_0 \cdot \dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} & (6) \end{cases}$$

- Lấy tiệm cận Δx→0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -R_0 \cdot i(x,t) - L_0 \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & (7) \\ \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -G_0 \cdot u(x,t) - C_0 \cdot \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & (8) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Xét riêng cho trường hợp tín hiệu xoay chiều điều hòa:

$$\begin{cases} u(x,t) & = & U_0(x)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi(x)\right) \\ i(x,t) & = & I_0(x)\cdot\sin\left(\omega t+\theta(x)\right) \end{cases}$$

- Ảnh phức của các tín hiệu:

$$\begin{cases} u(x,t)=U_0(x)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi(x)\right) \quad \to \quad \dot{U}(x)=\dfrac{U_0(x)}{\sqrt{2}}\measuredangle\varphi(x) \\ \\ i(x,t)=I_0(x)\cdot\sin\left(\omega t+\theta(x)\right) \quad \to \quad \dot{I}(x)=\dfrac{I_0(x)}{\sqrt{2}}\measuredangle\theta(x) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Hệ phương trình (7) và (8) chuyển sang ảnh phức:

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{U}(x)}{dx} = -R_0 \cdot \dot{I}(x) - L_0 \cdot j\omega\dot{I}(x) = -(R_0 + j\omega L_0) \cdot \dot{I}(x) & (9) \\ \dfrac{d\dot{I}(x)}{dx} = -G_0 \cdot \dot{U}(x) - C_0 \cdot j\omega\dot{U}(x) = -(G_0 + j\omega C_0) \cdot \dot{U}(x) & (10) \end{cases}$$

- Đặt các biến mới:
    - Tổng trở phức dọc (đường dây): $Z_0 = R_0 + j\omega L_0;$
    - Tổng dẫn phức ngang (đường dây): $Y_0 = G_0 + j\omega C_0;$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Hệ phương trình cho ảnh phức:

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{U}(x)}{dx} = -Z_0 \cdot \dot{I}(x) & (11) \\ \dfrac{d\dot{I}(x)}{dx} = -Y_0 \cdot \dot{U}(x) & (12) \end{cases}$$

- Từ trên suy ra (đạo hàm cả hai vế 1 lần nữa theo *x*):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = -Z_0 \cdot \dfrac{d\dot{I}(x)}{dx} = \left(Z_0 \cdot Y_0\right)\dot{U}(x) & (13) \\ \dfrac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = -Y_0 \cdot \dfrac{d\dot{U}(x)}{dx} = \left(Z_0 \cdot Y_0\right)\dot{I}(x) & (14) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Đặt biến mới:
  - Hệ số truyền sóng: $\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j\beta$
- Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot \dot{U}(x) & (15) \\ \dfrac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \cdot \dot{I}(x) & (16) \end{cases}$$

- Hệ có nghiệm (với các hệ số *phức*):

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} & (17) \\ \dot{I}(x) = \dot{B}_1 e^{-\gamma x} + \dot{B}_2 e^{\gamma x} & (18) \end{cases}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Liên hệ giữa các hệ số (phối hợp các phương trình (17), (18) với các phương trình (11),(12)):

$$\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \left(-\gamma \dot{A}_1\right)e^{-\gamma x} + \left(\gamma \dot{A}_2\right)e^{\gamma x} = -Z_0 \cdot \left(\dot{B}_1 e^{-\gamma x} + \dot{B}_2 e^{\gamma x}\right)$$

$$\rightarrow \dot{B}_1 = \frac{\gamma \dot{A}_1}{Z_0}; \dot{B}_2 = -\frac{\gamma \dot{A}_2}{Z_0}$$

- Đặt biến mới: Tổng trở sóng của đường dây

$$Z_C = \frac{Z_0}{\gamma}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Đặt biến mới: Các thành phần thuận nghịch

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) & (17) \\ \dot{I}(x) = \dfrac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{-\gamma x} - \dfrac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{\gamma x} = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) & (18) \end{cases}$$

- Quan hệ giữa các thành phần:

$$\frac{\dot{U}^+(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{I}^-(x)} = Z_C$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Xem xét thành phần $e^{-\gamma x}$:

$$\dot{U}^{+} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} = A_1 e^{j\varphi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \varphi_1)}$$

với: $\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j\beta; \dot{A}_1 = A_1 \angle \varphi_1$

- Hàm thời gian tương ứng:

$$u^{+}(x,t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin\left(\omega t - \beta x + \varphi_1\right)$$

là thành phần sóng thuận (từ trái sang phải) lan truyền với tốc độ

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Xem xét thành phần $e^{+\gamma x}$:

$$\dot{U}^{-} = \dot{A}_2 e^{\gamma x} = A_2 e^{j\varphi_2} e^{(\alpha + j\beta)x} = A_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \varphi_2)}$$

với: $\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j\beta; \dot{A}_2 = A_2 \measuredangle \varphi_2$

- Hàm thời gian tương ứng:

$$u^{-}(x,t) = \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin\left(\omega t + \beta x + \varphi_2\right)$$

là thành phần sóng nghịch (từ phải sang trái) lan truyền với tốc độ

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x} = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) & (17) \\ \dot{I}(x) = \dfrac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{-\gamma x} - \dfrac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{\gamma x} = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) & (18) \end{cases}$$

- Hệ số phản xạ n(x):

$$n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} e^{2\gamma x} = n_1 e^{2\gamma x}$$

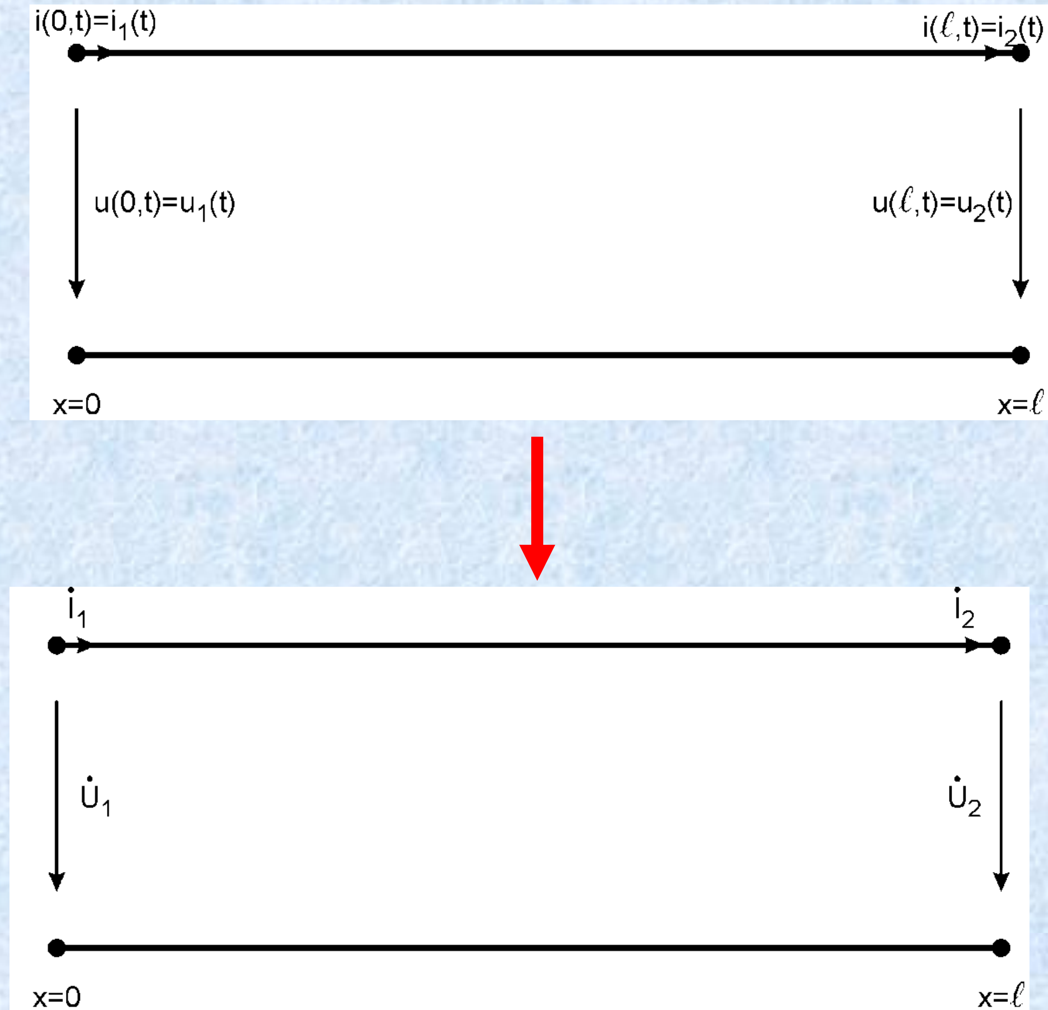
trong đó có hai vị trí đặc biệt:

$$x = 0 : n(0) = n_1$$

$$x = l : n(l) = n_2 = n_1 e^{2\gamma l}$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

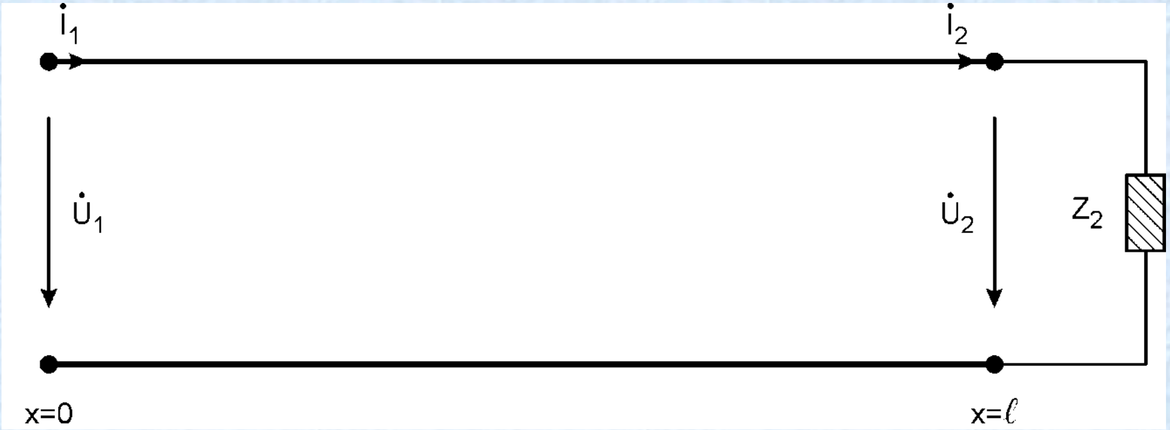
- Đầu đường dây (Cặp nút 1-1’):
  - Điện áp: $u_1(t), \dot{U}_1$
  - Dòng điện: $i_1(t), \dot{I}_1$
  - Hệ số phản xạ: n_1
- Cuối đường dây (Cặp nút 2-2’):
  - Điện áp: $u_2(t), \dot{U}_2$
  - Dòng điện: $i_2(t), \dot{I}_2$
  - Hệ số phản xạ: n_2



6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Khi cuối đường dây có tải Z_2:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^- \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_2^+ - \dot{I}_2^- \\ Z_C = \dfrac{\dot{U}_2^+}{\dot{I}_2^+} = \dfrac{\dot{U}_2^-}{\dot{I}_2^-} \\ n_2 = \dfrac{\dot{U}_2^-}{\dot{U}_2^+} = \dfrac{\dot{I}_2^-}{\dot{I}_2^+} \\ Z_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \end{cases}$$



$$\rightarrow n_2 = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C}\left(= n_1 e^{2\gamma l}\right)$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Ba trường hợp đặc biệt:
  - Hở mạch: $Z_2 = \infty \rightarrow n_2 = 1$
  - Ngắn mạch: $Z_2 = 0 \rightarrow n_2 = -1$
  - Hòa hợp tải: $Z_2 = Z_C \rightarrow n_2 = 0$

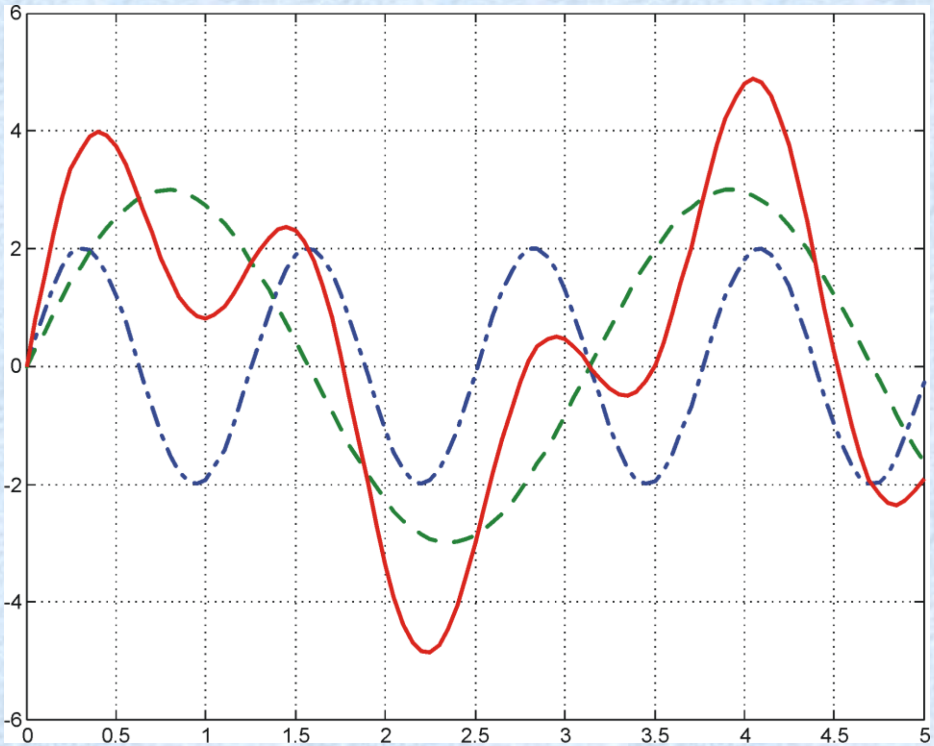
6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

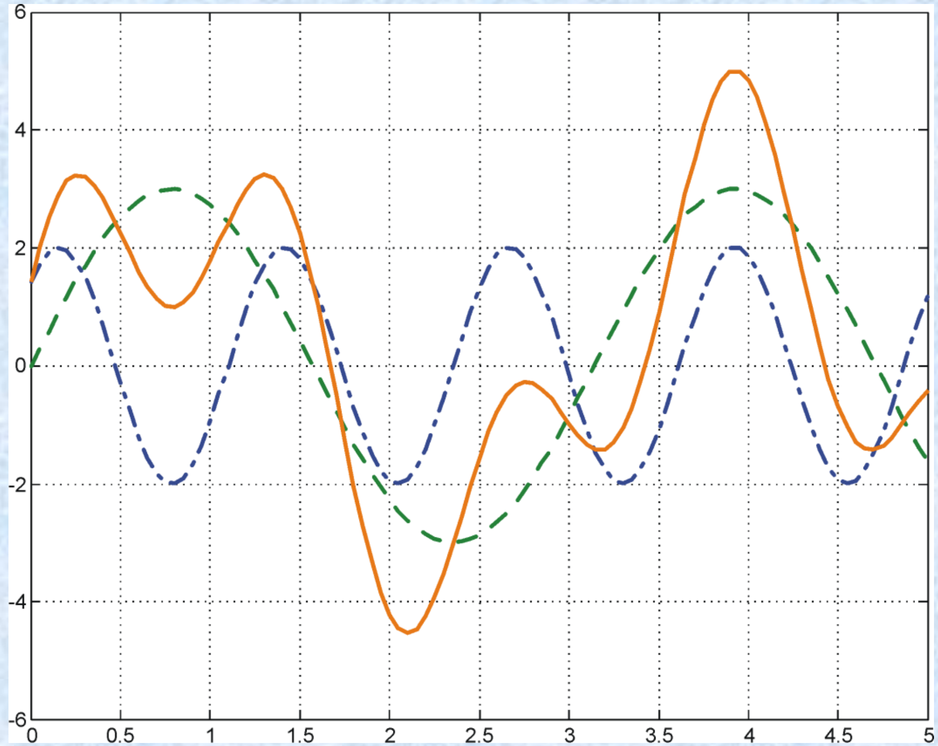
- Tóm tắt lại các thông số đặc trưng của đường dây dài (khi được cho R_0, L_0, G_0, C_0 và ω):

  - Tổng trở dọc: $$Z_0 = R_0 + j\omega L_0$$
  - Tổng dẫn ngang: $$Y_0 = G_0 + j\omega C_0$$
  - Hệ số truyền sóng: $$\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j\beta$$
  - Vận tốc truyền sóng: $$v = \frac{\omega}{\beta}$$
  - Tổng trở sóng: $$Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$
  - Hệ số phản xạ: $$\dot{n}(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)}; \dot{n}_2 = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C}.$$

6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Một số nhận xét:
  - Tốc độ truyền sóng là một hàm của tần số nên dẫn tới hiện tượng méo tín hiệu.





6.3. Các hệ phương trình đặc trưng cơ bản của đường dây dài

- Điện kiện để chống méo tín hiệu: Khi vận tốc truyền sóng không phụ thuộc vào tần số, ví dụ:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = k$$

$$\rightarrow \gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \sqrt{\left(R_0 + j\omega L_0\right)\left(G_0 + j\omega C_0\right)} = \sqrt{L_0 \cdot C_0}\left(k + j\omega\right)$$

$$\rightarrow \beta = \mathrm{Im}(\gamma) = \omega\sqrt{L_0 \cdot C_0} \rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$$

- Phương pháp Pupin hóa: Ta chọn một trong bốn thông số của đường dây để thay đổi, thực tế hay điều chỉnh L_0 nhất bằng cách bù thêm L_{Pupin} trên mỗi đơn vị dài của đường dây!

$$\frac{R_0}{L_0} \neq \frac{G_0}{C_0} \rightarrow \frac{R_0}{L_0 + L_{Pupin}} = \frac{G_0}{C_0} \rightarrow L_{Pupin} = \frac{R_0 \cdot C_0}{G_0} - L_0$$

Chương VII: Đường dây dài ở chế độ truyền công suất

7.1. Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài

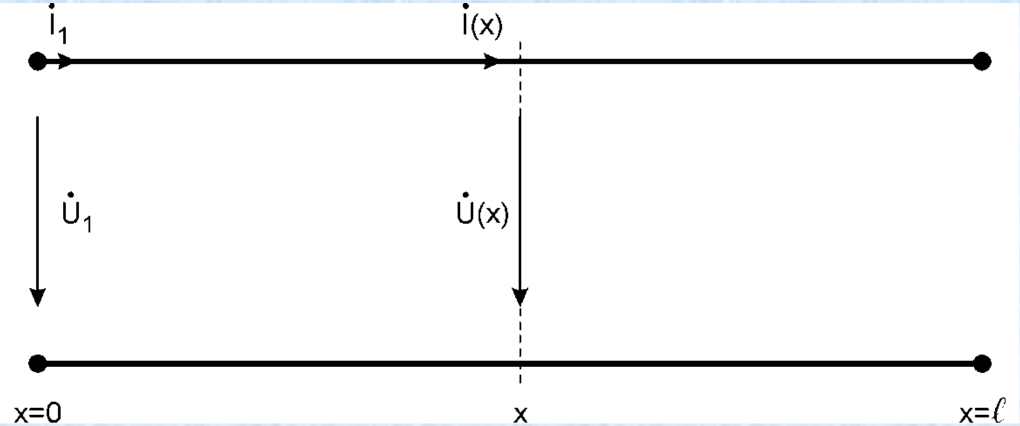
7.2. Ma trận **A** tương đương của đường dây dài

7.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền công suất

7.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền công suất

7.1. Hệ phương trình dạng hyperbolic của đường dây dài

- Các nghiệm của các hệ phương trình mạch đường dây dài có chứa các thành phần $e^{-\gamma x}$ và $e^{\gamma x}$
- Dạng đã trình bày ở phần trên chưa thực sự thuận tiện cho tính toán trên đường dây.
- Ta xét nghiệm ở dạng (với *x* – khoảng cách tới đầu đường dây) $\dot{U}(x) = M\cosh(\gamma x) + N\sinh(\gamma x)$



7.1. Hệ phương trình dạng hyperbolic của đường dây dài

- Khi đó dòng điện được tính theo:

$$\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \gamma M \sinh\left(\gamma x\right) + \gamma N \cosh\left(\gamma x\right) = -Z_0 \cdot \dot{I}(x)$$

$$\rightarrow \dot{I}(x) = -\frac{M}{Z_C}\sinh\left(\gamma x\right) - \frac{N}{Z_C}\cosh\left(\gamma x\right)$$

- Tại điểm đầu đường dây (x=0)

$$\begin{cases} \dot{U}(0) & = & M \\ \dot{I}(0) & = & -\dfrac{N}{Z_C} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M & = & \dot{U}(0) = \dot{U}_1 \\ N & = & -Z_C \cdot \dot{I}(0) = -Z_C \cdot \dot{I}_1 \end{cases}$$

7.1. Hệ phương trình dạng hyperbolic của đường dây dài

- Từ đó ta có (biểu diễn theo dạng **B**):

$$\begin{cases} \dot{U}(x) & = & \dot{U}_1 \cdot \cosh(\gamma x) - \dot{I}_1 \cdot Z_C \cdot \sinh(\gamma x) \\ \dot{I}(x) & = & -\dot{U}_1 \cdot \dfrac{1}{Z_C} \cdot \sinh(\gamma x) + \dot{I}_1 \cdot \cosh(\gamma x) \end{cases}$$

- Tại điểm cuối đường dây (x=l) (biểu diễn theo dạng **B**)

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}(l) & = & \dot{U}_1 \cdot \cosh(\gamma l) - \dot{I}_1 \cdot Z_C \cdot \sinh(\gamma l) \\ \dot{I}_2 = \dot{I}(l) & = & -\dot{U}_1 \cdot \dfrac{1}{Z_C} \cdot \sinh(\gamma l) + \dot{I}_1 \cdot \cosh(\gamma l) \end{cases}$$

7.2. Ma trận **A** tương đương của đường dây dài

- Từ đó suy ra biểu diễn theo dạng **A** (với x là khoảng cách tới ***<u>cuối</u>*** đường dây)

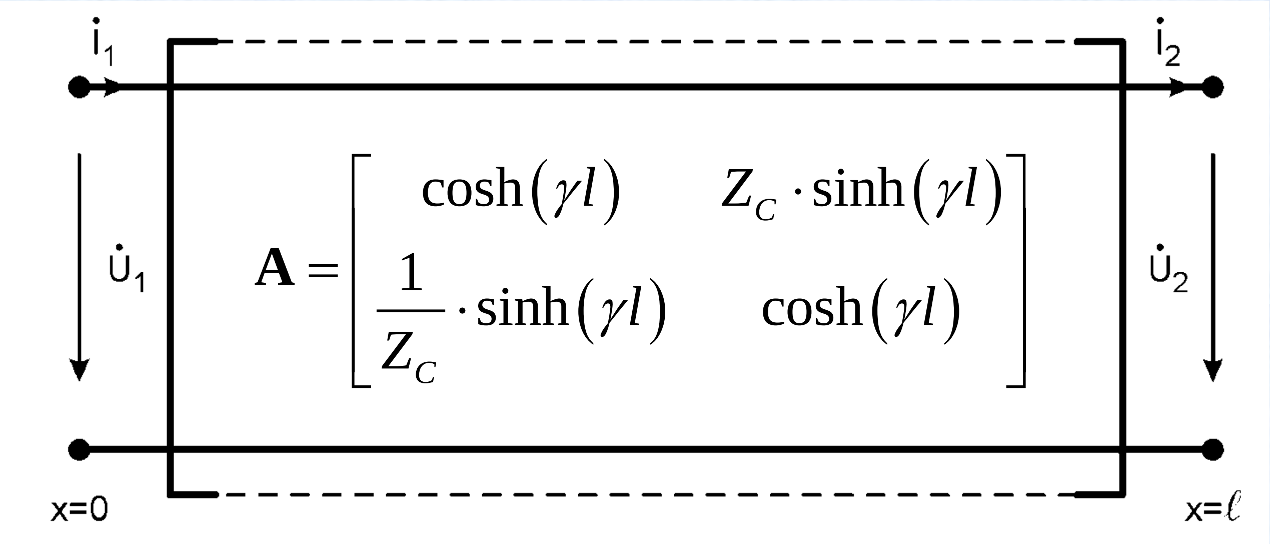
$$\begin{cases} \dot{U}(x) & = & \dot{U}_2 \cdot \cosh\left(\gamma x\right) + \dot{I}_2 \cdot Z_C \cdot \sinh\left(\gamma x\right) \\ \dot{I}(x) & = & \dot{U}_2 \cdot \dfrac{1}{Z_C} \cdot \sinh\left(\gamma x\right) + \dot{I}_2 \cdot \cosh\left(\gamma x\right) \end{cases}$$

- Tại điểm đầu đường dây (khoảng cách đến cuối đường dây x=l) (biểu diễn theo dạng **A**)

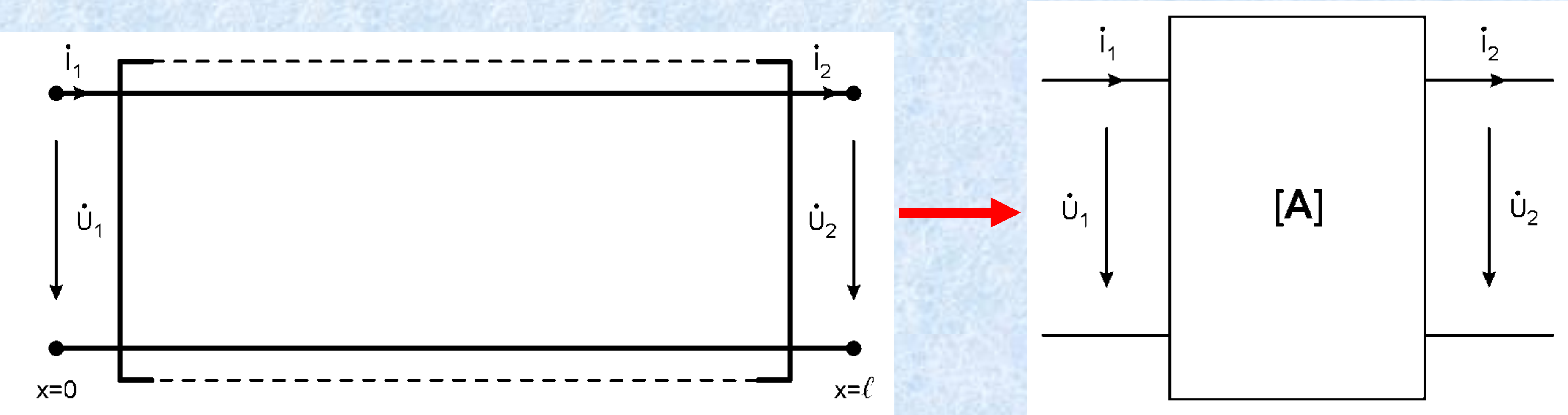
$$\begin{cases} \dot{U}_1 & = & \dot{U}_2 \cdot \cosh\left(\gamma l\right) + \dot{I}_2 \cdot Z_C \cdot \sinh\left(\gamma l\right) \\ \dot{I}_1 & = & \dot{U}_2 \cdot \dfrac{1}{Z_C} \cdot \sinh\left(\gamma l\right) + \dot{I}_2 \cdot \cosh\left(\gamma l\right) \end{cases}$$

7.2. Ma trận **A** tương đương của đường dây dài

- Ma trận **A** của đường dây dài:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_C \cdot \sinh(\gamma l) \\ \dfrac{1}{Z_C} \cdot \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$



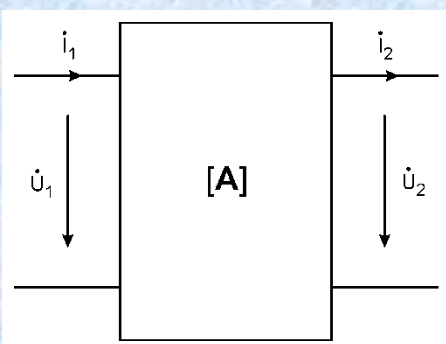
7.2. Ma trận **A** tương đương của đường dây dài

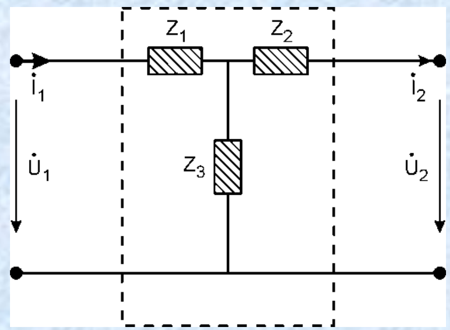
- Khi ta thay đường dây dài bằng mạng hai cửa cho theo ma trận **A**, ta sẽ đưa được bài toán *mạng có thông số rải (đường dây dài)* về bài toán *mạng tập trung* và hoàn toàn có thể sử dụng các phương pháp đã biết để giải mạch tìm các tín hiệu ở đầu và cuối đường dây (cũng là đầu vào và đầu ra của mạng hai cửa).

7.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền công suất

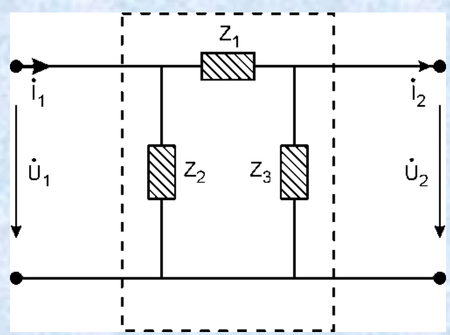
– Nhắc lại một số phương pháp giải mạch có mạng hai cửa (cho theo ma trận **A**):

- Thay tương đương mạng hai cửa cho theo A bằng mạng hai cửa chữ T hoặc Π.





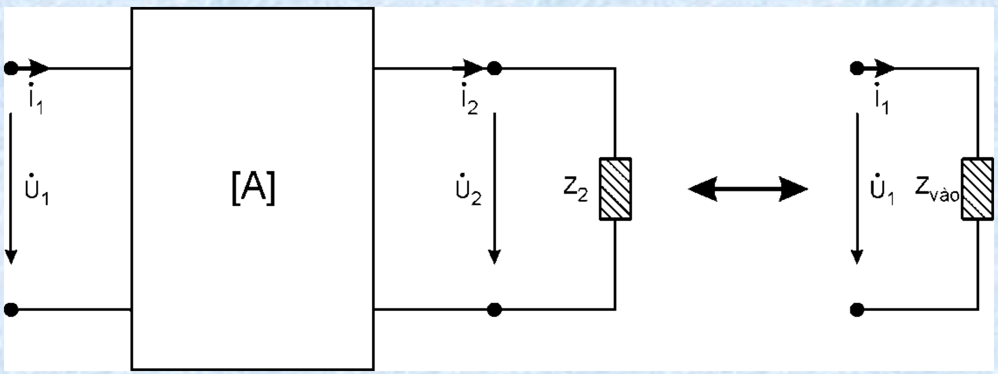
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_1}{Z_3} & Z_1+Z_2+\dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_3} \\ \dfrac{1}{Z_3} & 1+\dfrac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3}+\dfrac{Z_1}{Z_2Z_3} & 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

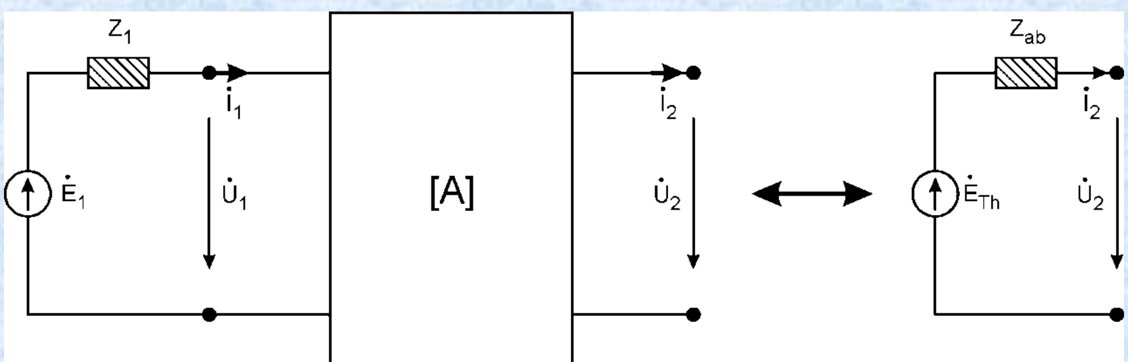
7.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền công suất

- Sử dụng công thức tổng trở vào khi cửa ra chỉ có tải tuyến tính (chú ý các trường hợp đặc biệt như ngắn mạch, hở mạch, hòa hợp,…):



$$Z_{v\mu o} = \frac{a_{11}Z_2 + a_{12}}{a_{21}Z_2 + a_{22}}$$

- Mạch tương đương Thé-ve-nin – Norton:

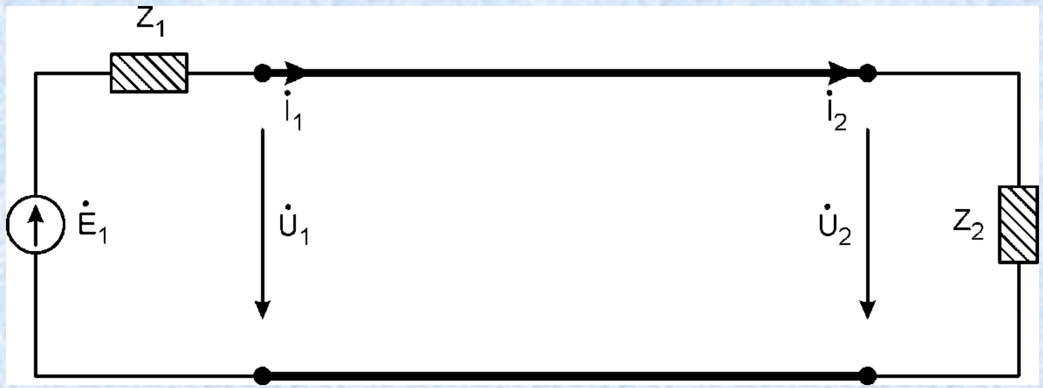


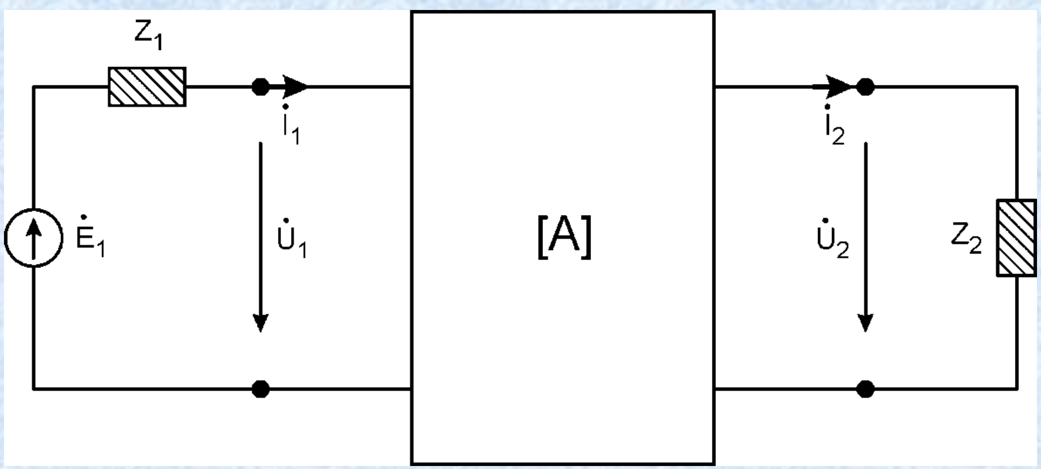
$$\dot{E}_{Th} = \frac{\dot{E}_1}{a_{21}Z_1 + a_{11}}$$

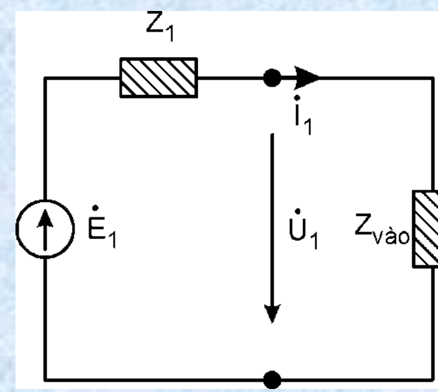
$$Z_{ab} = \frac{a_{22}Z_1 + a_{12}}{a_{21}Z_1 + a_{11}}$$

7.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền công suất

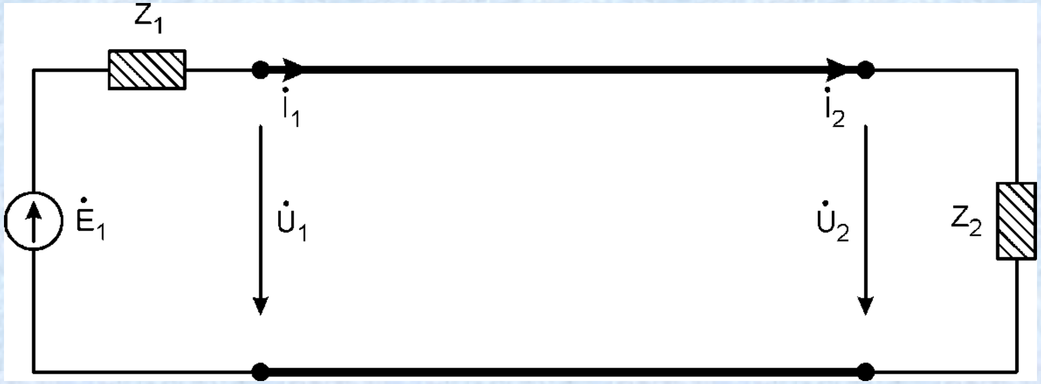
Ví dụ mạch 1 phụ tải:

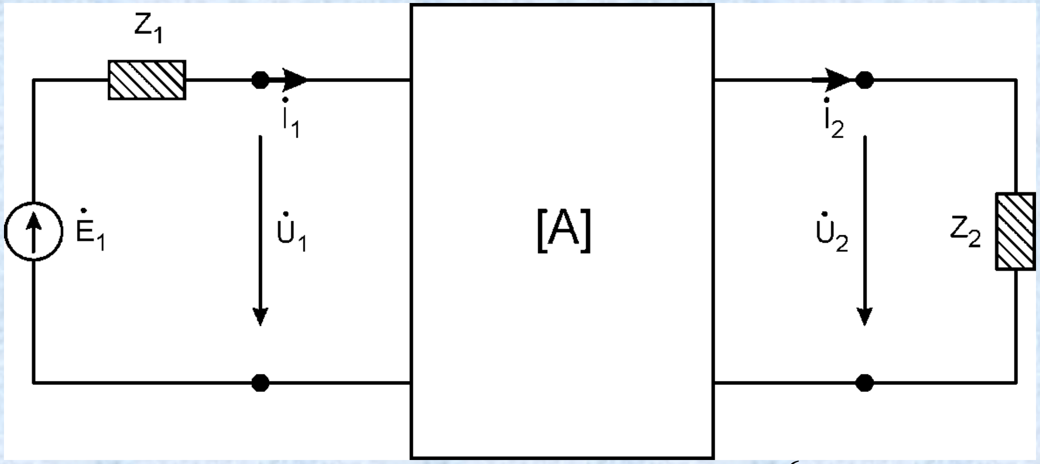


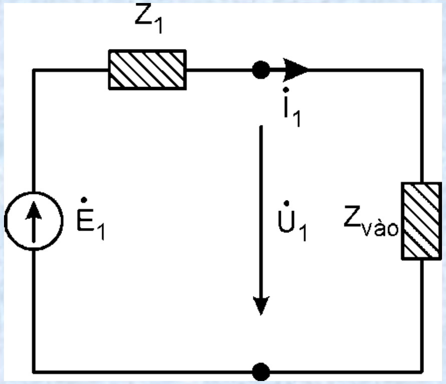




7.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền công suất



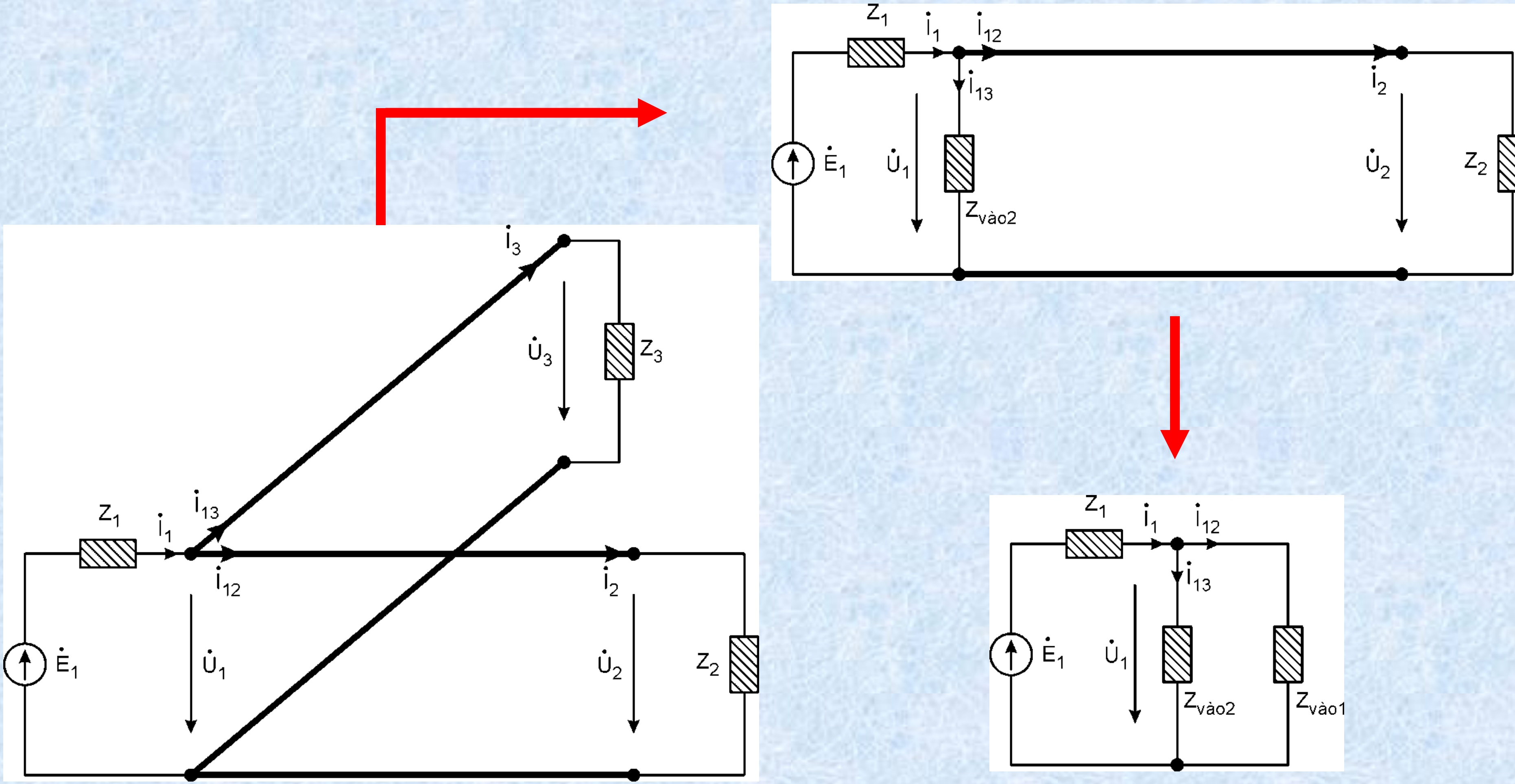




$$Z_{v\mu o} = \frac{a_{11}Z_2 + a_{12}}{a_{21}Z_2 + a_{22}} \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = \dfrac{Z_{v\mu o}}{Z_1 + Z_{v\mu o}}\dot{E}_1 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_{v\mu o}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_2 = \dots \\ \dot{I}_2 = \dots \end{cases} \rightarrow \dots$$

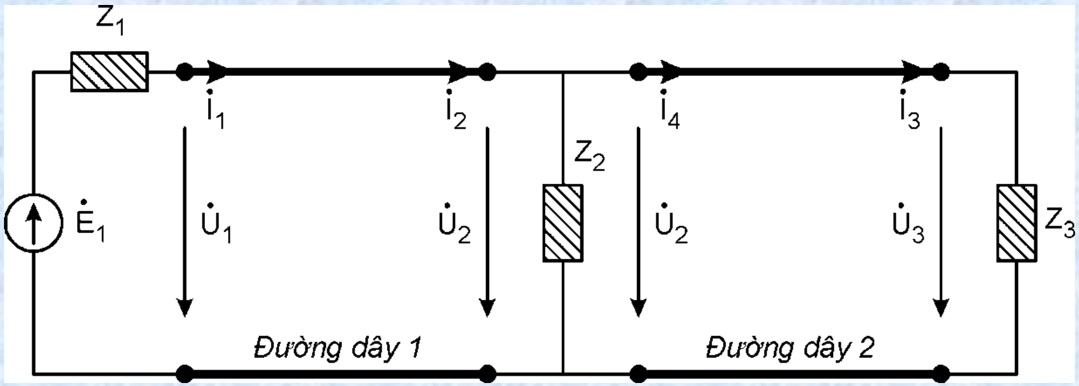
7.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền công suất

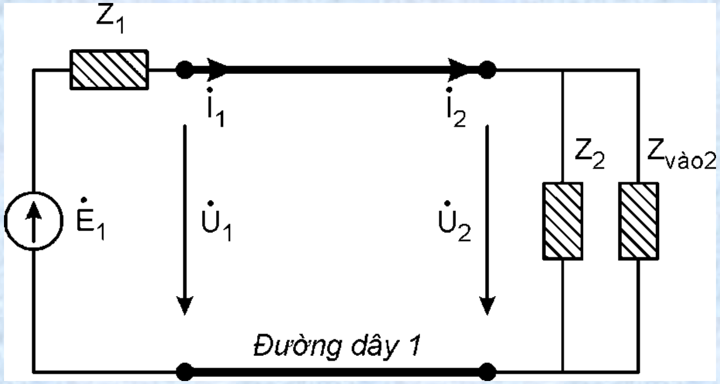
Ví dụ mạch 2 nhánh đường dây song song:

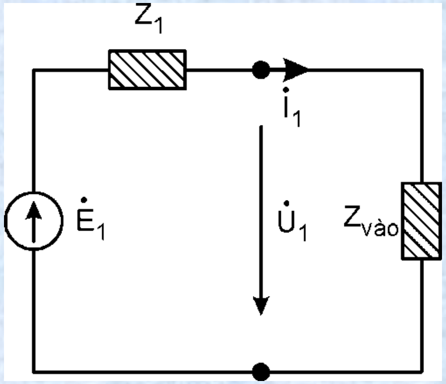


7.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền công suất

Ví dụ mạch 2 đường dây nối tiếp:







Chương VIII: Đường dây dài ở chế độ truyền sóng

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

8.2. Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây đơn

8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

Chương VIII: Đường dây dài ở chế độ truyền sóng

- Quá trình quá độ trên đường dây dài ta *tạm* xét cho đường dây *không tiêu tán* (R_0=G_0=0):

• Trong mạch tần số cao (ω rất lớn):

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 \approx j\omega L_0 \rightarrow R_0 \approx 0$$
$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 \approx j\omega C_0 \rightarrow G_0 \approx 0$$

• Trong mạch truyền công suất: Việc giảm độ chính xác cho phép ta có thể dễ dàng tính toán hơn nên *tạm chấp nhận*.

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Đường dây dài không tiêu tán có các thông số cơ bản tính toán đơn giản hơn:

  - Tổng trở dọc: $Z_0 = j\omega L_0$
  - Tổng dẫn ngang: $Y_0 = j\omega C_0$
  - Hệ số truyền sóng: $\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} \rightarrow \alpha = 0; \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$
  - Vận tốc truyền sóng: $v = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$
  - Tổng trở sóng: $Z_C = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}} \in \mathbb{R}$ - là *điện trở thuần*

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Hệ số phản xạ:

$$\dot{n}(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)}; \dot{n}_2 = \frac{Z_2 - Z_C}{Z_2 + Z_C}$$

- Mạng hai cửa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_C \cdot \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_C} \cdot \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j \cdot Z_C \cdot \sin(\beta l) \\ j \cdot \frac{1}{Z_C} \cdot \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Một số nhận xét về các thông số của đường dây không tiêu tán:
  - Tổng trở sóng là số thực (thành phần ảo bằng 0) nên tương đương với *điện trở thuần*.
  - Vận tốc truyền sóng không phụ thuộc vào tần số nên đường dây không tiêu tán cũng là đường dây *không méo*.
  - Đường dây không tiêu tán sẽ có công suất tiêu thụ trên đường dây bằng 0.
  - Tín hiệu truyền trên đường dây không tiêu tán chỉ bị "trễ" (hay hệ số pha thay đổi) chứ không bị suy giảm các biên độ:

$$u_B(t) = u_A(t-T) \leftrightarrow T = \frac{l_{AB}}{v}$$

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Để đơn giản hóa, ta *tạm* xét các trường hợp sau:
  - Quá độ không có sơ kiện (các sơ kiện bằng 0).
  - Sóng trên đường dây được “tạo” bởi:
    - Đóng nguồn đầu đường dây
    - Sét đánh tại một điểm trên đường dây.

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Ta chia các hiện tượng cần xem xét thành 2 nhóm:
  - Các hiện tượng xảy ra khi sóng đang chạy trên đường dây
  - Các hiện tượng xảy ra khi sóng tới 1 điểm nút nào đó (cuối 1 đường dây, điểm nối giữa các đường dây, điểm nối các tải vào đường dây)

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Các hiện tượng xảy ra khi sóng đang chạy trên đường dây:
  - Do đường dây không tiêu tán nên chỉ có hiện tượng ***trễ***:

$$u_B(t) = u_A(t - \Delta t) \qquad \Delta t = \frac{l_{AB}}{v} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

  - Tùy theo chiều của sóng chạy, mỗi sóng trên đường dây là một thành phần thuận hoặc nghịch nên giữa dòng và áp của sóng chạy vẫn có liên hệ (lưu ý do Z_C là thuần trở nên quan hệ có thể cho được theo hàm thời gian)

$$u^+(x,t) = Z_C \cdot i^+(x,t); u^-(x,t) = Z_C \cdot i^-(x,t)$$

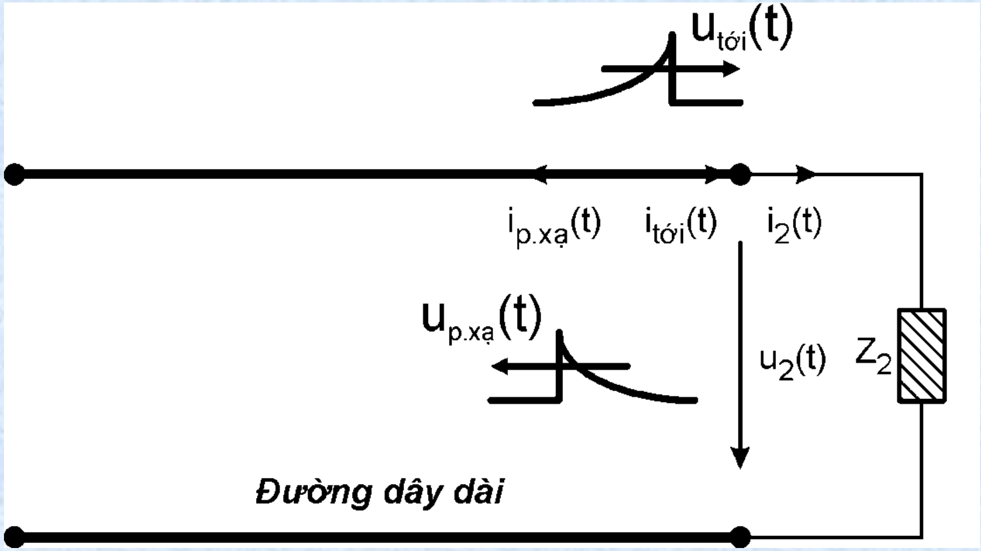
8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Các hiện tượng xảy ra khi sóng đánh tới điểm nối:
  - Một phần năng lượng của sóng sẽ “khúc xạ” vào hệ thống ghép nối vào đường dây
  - Một phần năng lượng sẽ tạo thành sóng “phản xạ” lan truyền ngược trở lại
- Nếu cuối đường dây chỉ là tải thì phần năng lượng khúc xạ sẽ tiêu tán trên tải đó
- Nếu cuối đường dây còn có các đường dây khác nối vào thì một phần năng lượng khúc xạ sẽ tạo thành 1 sóng mới ở đầu các đường dây phía sau (nên sóng này được gọi là sóng *khúc xạ*)

8.1. Đường dây dài không tiêu tán và hiện tượng sóng chạy trên đường dây

- Bài toán cơ bản:
    - Cho biết các thông số của đường dây và của sóng đánh tới trên đường dây đó, cho biết các thông số của hệ thống ghép nối trên đường dây.
    - Xác định thành phần phản xạ và thành phần khúc xạ (dòng và áp)

Bài toán cơ bản có thể được giải bằng mô hình Petersen!



8.2. Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây đơn

- Khi sóng đánh tới cuối đường dây ta có:

$$\begin{cases} u_{\text{tí i}}(x,t) & = & u^{+}(x,t) \\ u_{\text{p.x}^{1}}(x,t) & = & u^{-}(x,t) \end{cases}$$

- Do tổng trở sóng Z_C là thuần trở nên:

$$\rightarrow \begin{cases} u_{\text{tí i}}(x,t) & = & Z_C \cdot i_{\text{tí i}}(x,t) \\ u_{\text{p.x}^{1}}(x,t) & = & Z_C \cdot i_{\text{p.x}^{1}}(x,t) \end{cases}$$

- Theo phương trình truyền sóng tại điểm cuối:

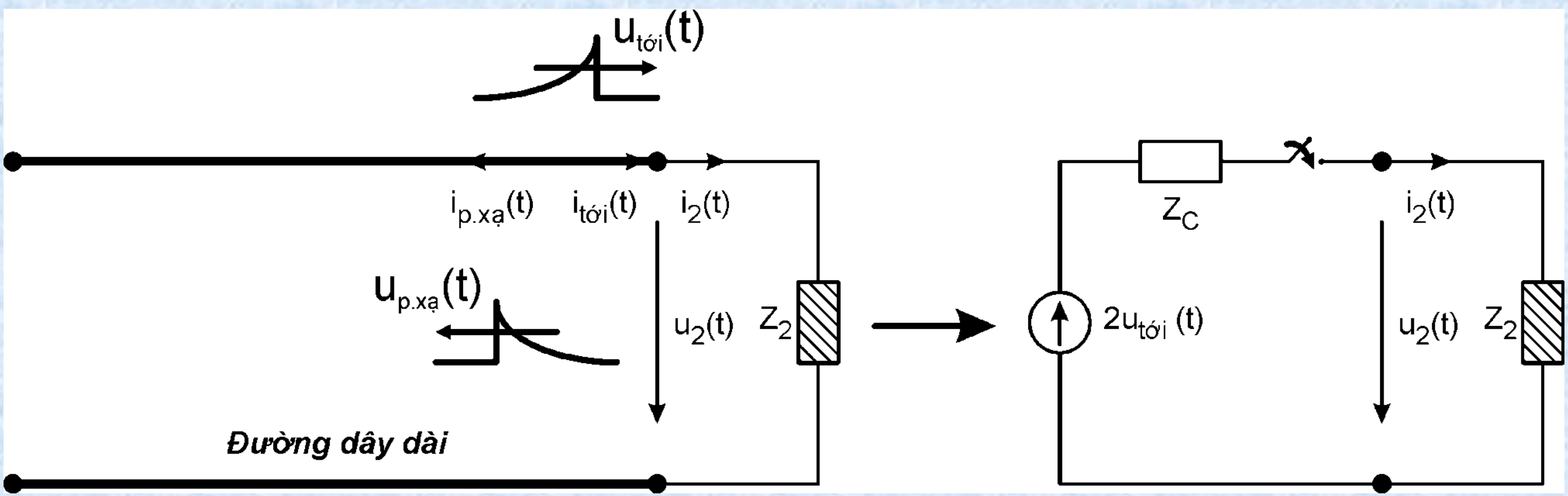
$$\rightarrow \begin{cases} u_2(t) & = & u_{\text{tí i}}(l,t) + u_{\text{p.x}^{1}}(l,t) \\ i_2(t) & = & i_{\text{tí i}}(l,t) - i_{\text{p.x}^{1}}(l,t) \end{cases}$$

8.2. Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây đơn

- Từ hai phương trình trên suy ra:

$$u_2(t)+Z_C\cdot i_2(t)=2\cdot u_{\text{tới}}(l,t)=2\cdot u_{\text{tới}}(t)$$

→ Có thể xây dựng mô hình mạch tương đương mô tả quan hệ trên như sau (mô hình Petersen) trong đó mốc thời gian t=0 là thời điểm sóng đánh tới cuối đường dây!



8.2. Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây đơn

- Từ mô hình Petersen ta có: Các hiện tượng xảy ra tại cuối đường dây tương tự như việc đóng 1 nguồn điện áp $e(t)=2u_{tới}(t)$ có điện trở trong bằng Z_c vào mạch tải cuối đường dây.

→ Nếu tải cuối đường dây là tải *tuyến tính* thì ta sẽ sử dụng các phương pháp giải mạch tuyến tính (ví dụ phương pháp ảnh Laplace,…)

→ Nếu tải cuối đường dây là tải *phi tuyến* thì ta sẽ sử dụng các phương pháp giải mạch phi tuyến (ví dụ phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn, phương pháp sai phân,…)

8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

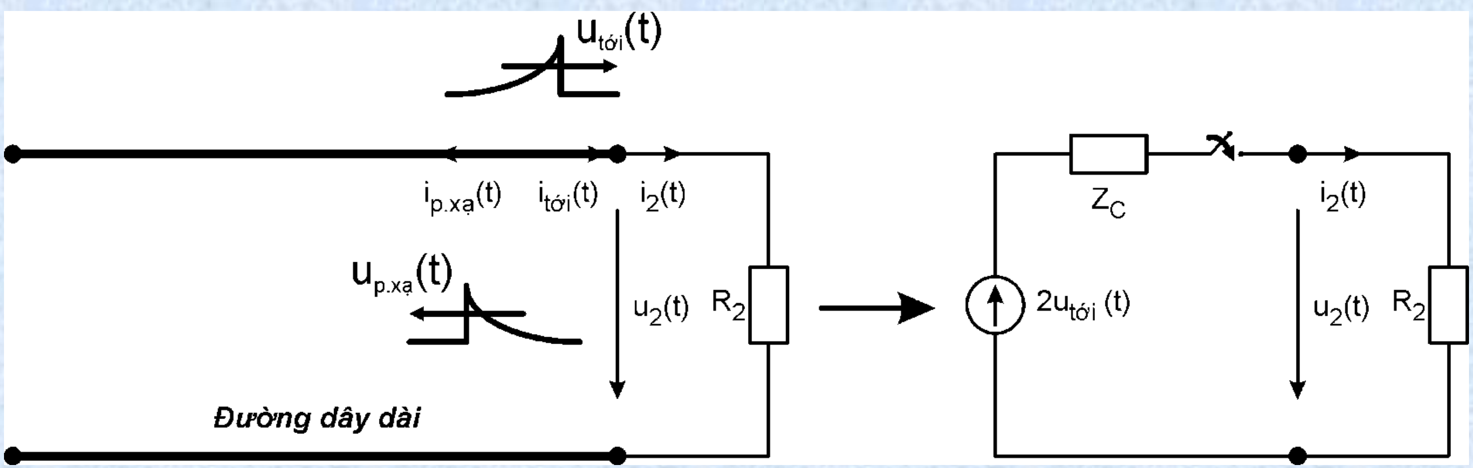
- Ví dụ minh họa:
  1. tải đơn thuần trở,
  2. tải đơn bảo vệ đơn,
  3. bảo vệ kép,
  4. tải biến áp,
  5. tải cảm phi tuyến,…
- Chú ý các trường hợp đặc biệt: $Z_2=0$, $Z_2=\infty$, $Z_2=Z_C$, $Z_2=R_2$.

8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

- Ví dụ minh họa “tải thuần trở”:

Xét $u_{tí\,i}(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t)\left(kV\right); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega.$

Do Z_C cũng là điện trở thuần nên có thể tính ngay kết quả:



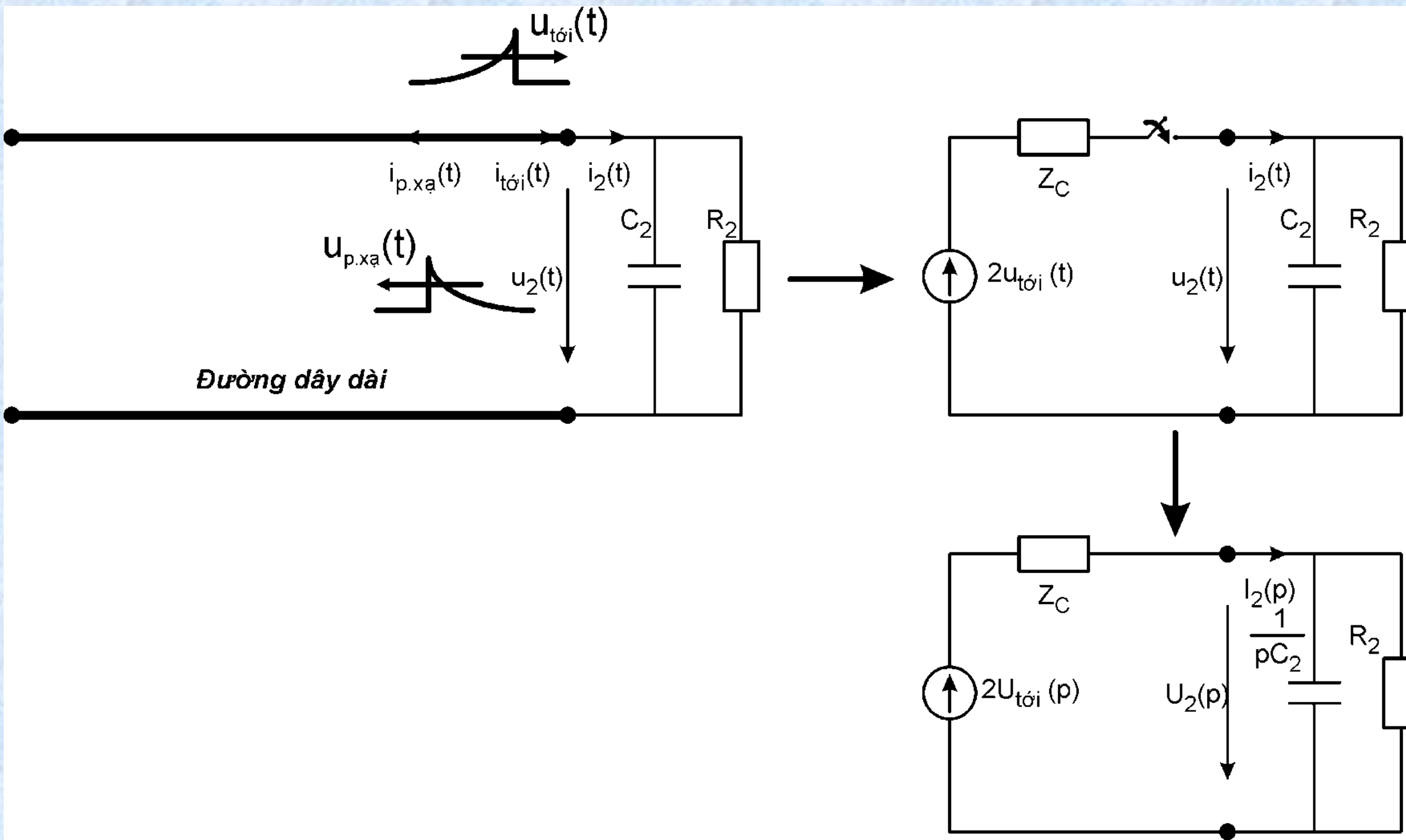
$$u_2(t) = \frac{R_2}{Z_C + R_2} \cdot 2u_{tí\,i}(t) = \frac{2R_2}{Z_C + R_2} \cdot u_{tí\,i}(t) = 1200 \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$\rightarrow u_{p.x'}(t) = u_2(t) - u_{tí\,i}(t) = 200 \cdot \mathbf{1}(t)$$

8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

Ví dụ minh họa “tải thuần trở” được bảo vệ đơn bằng tụ điện

Xét $u_{tới}(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega; C_2 = 0,2F.$



8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

Sử dụng phương pháp ảnh Laplace:

$$U_2(p)\left(\frac{1}{Z_C}+pC_2+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2U_{\text{tí i}}(p)}{Z_C}$$

$$\rightarrow U_2(p)\left(0,2p+0,0167\right)=\frac{20}{p}$$

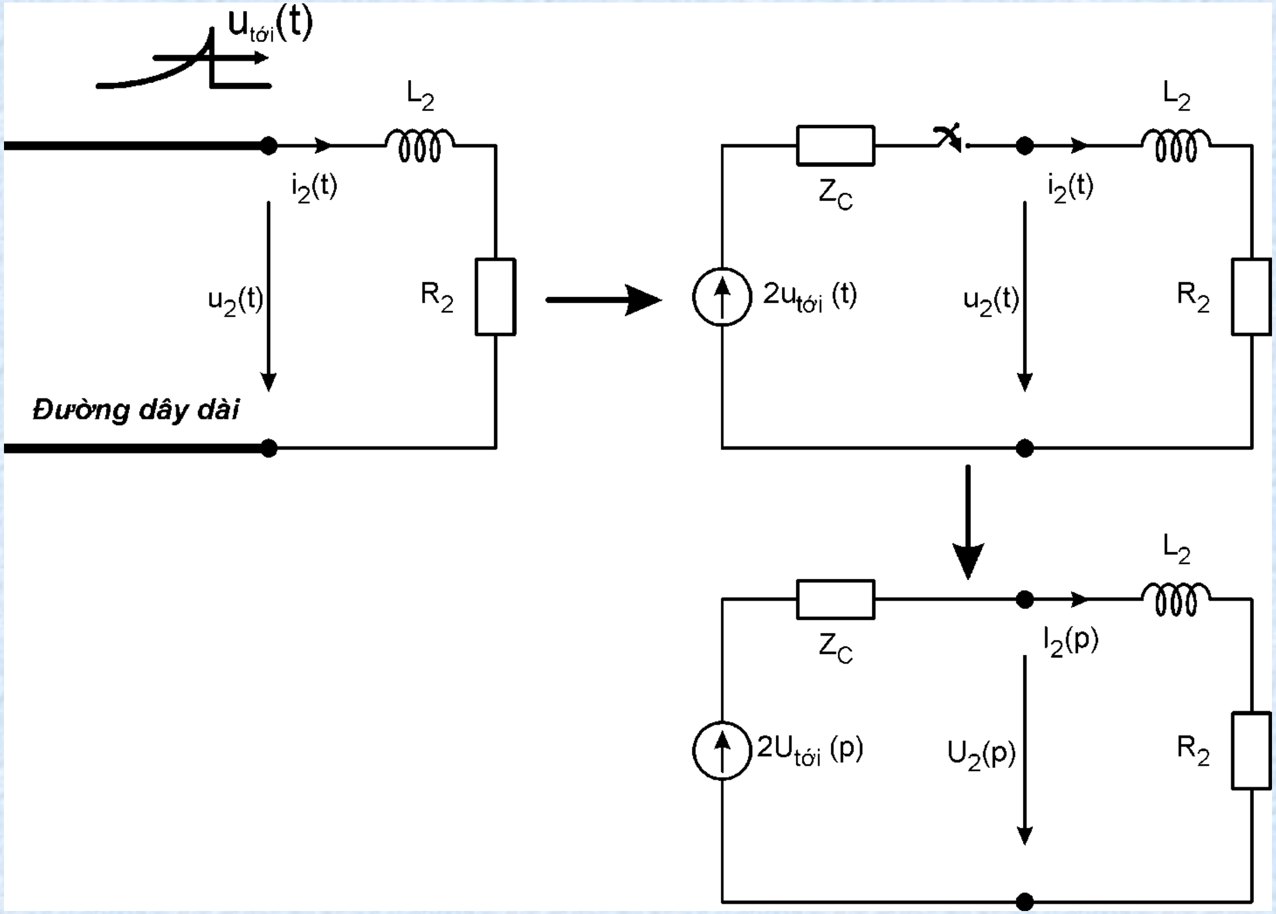
$$\rightarrow U_2(p)=\frac{20}{p\left(0,2p+0,0167\right)}$$

$$\rightarrow u_2(t)=1200-1200e^{-0,0833t}$$

Nhận xét: Điện áp trên tải R_2 vẫn tăng lên 1200kV tuy nhiên tăng dần dần (theo hàm mũ), khác với trường hợp tăng đột ngột theo hàm bước nhảy khi không có phần tử bảo vệ.

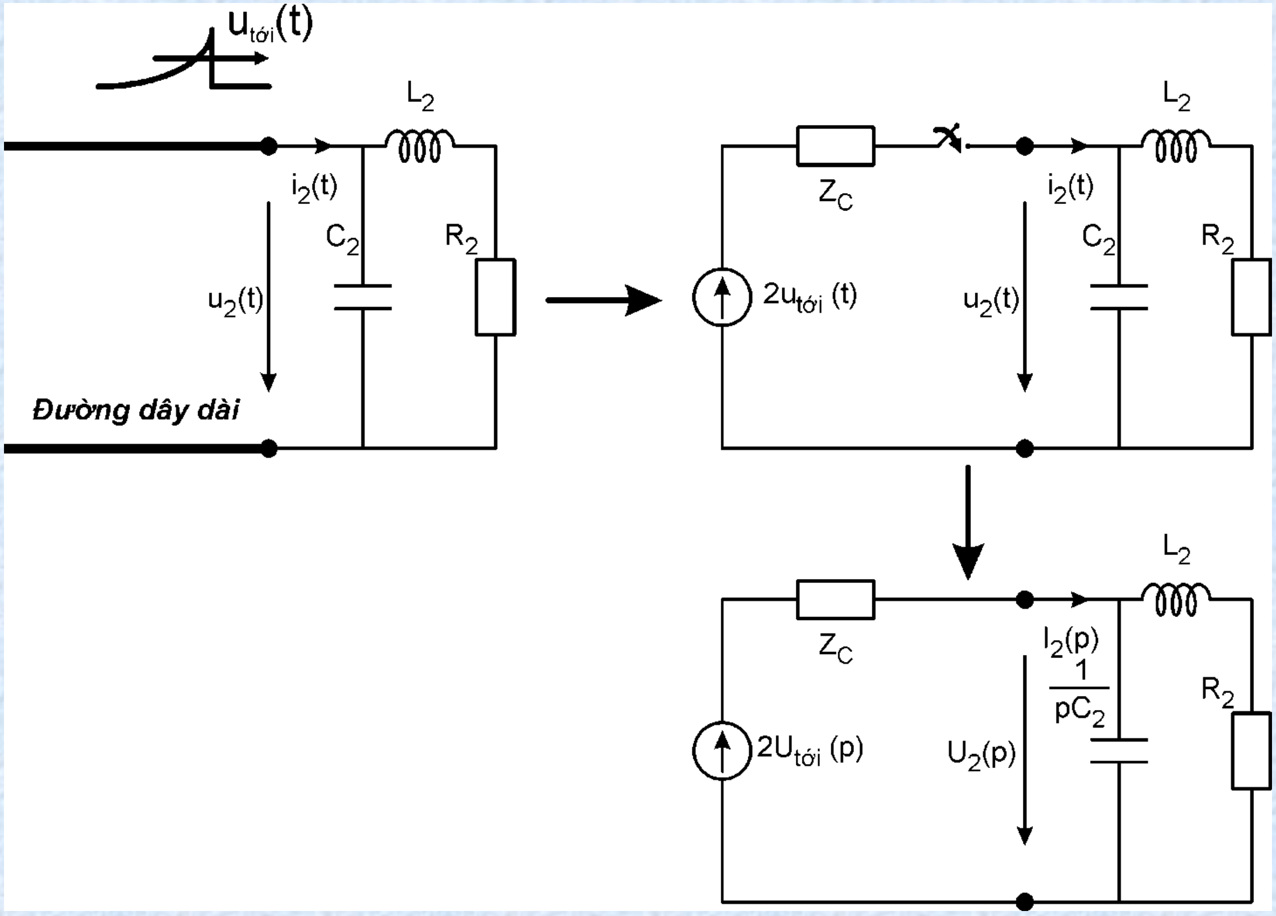
8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

Bài tập: Xét $u_{tới}(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega; L_2 = 0,4H.$



8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

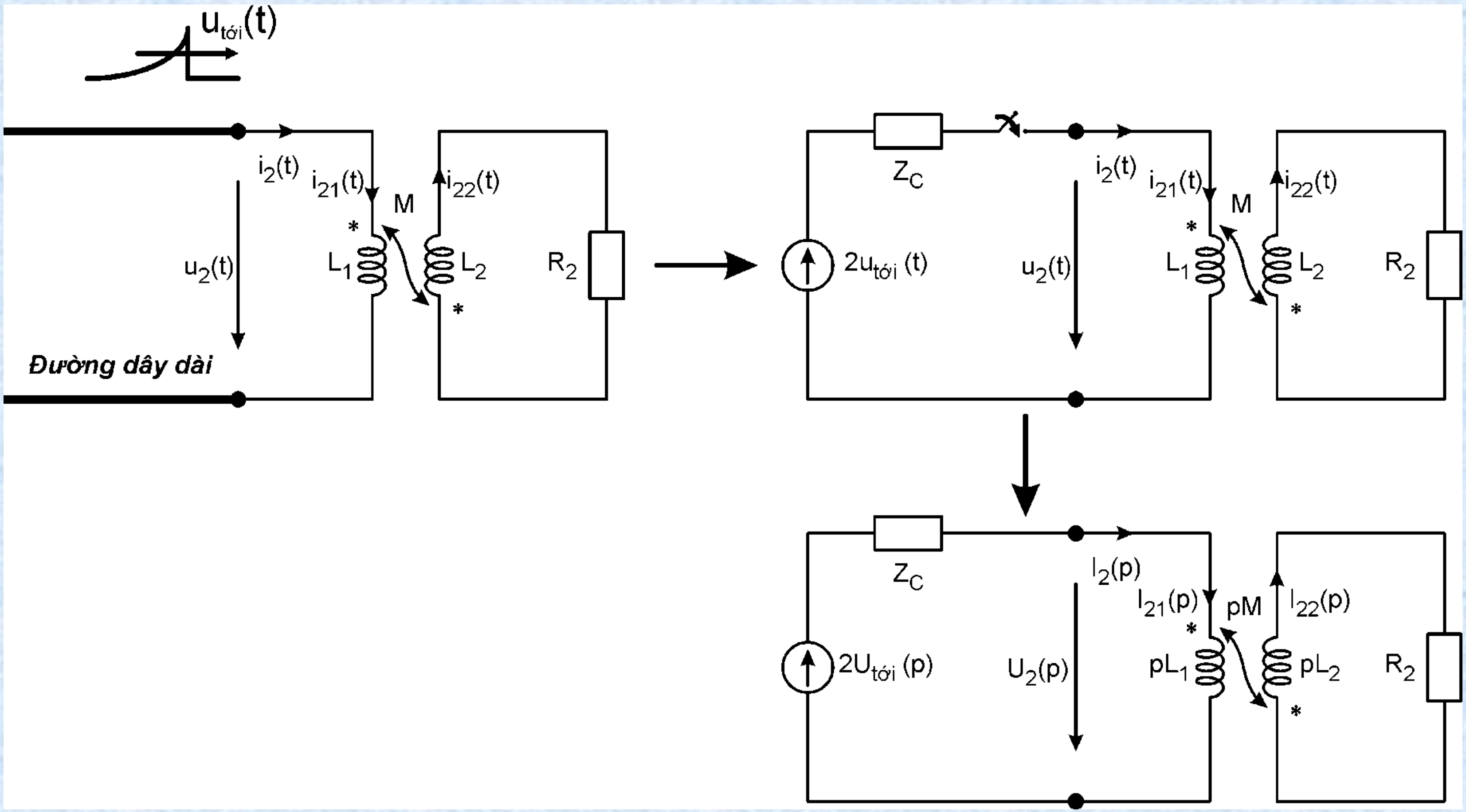
Bài tập: Xét $u_{tí\,i}(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega; L_2 = 0,4H; C_2 = 0,2F.$



8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

Bài tập: Xét $u_{tới}(t) = 1000 \cdot e^{-100t} \cdot \mathbf{1}(t); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega;$

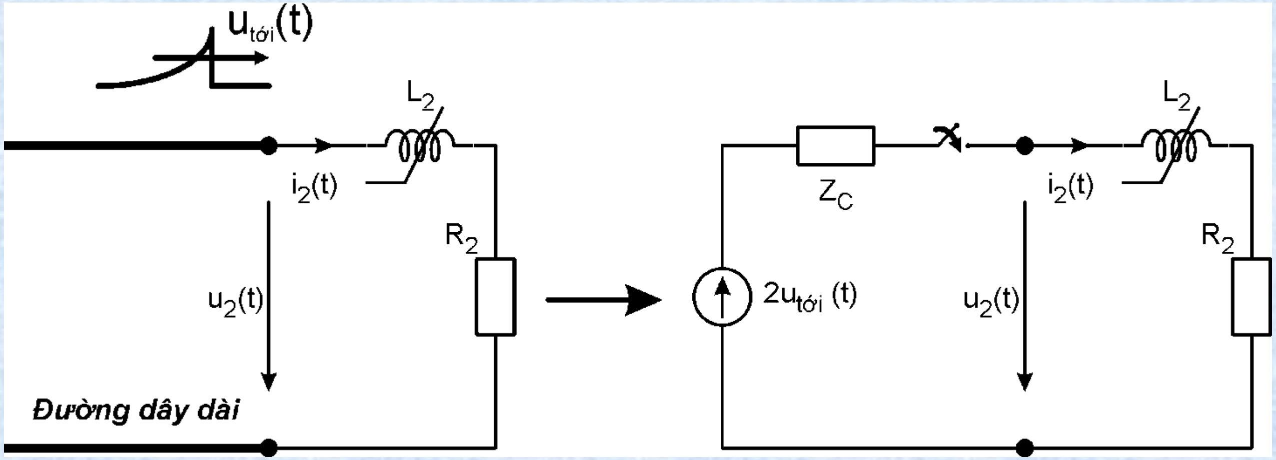
$L_1 = 0,4H; L_2 = 0,8H; M = 0,5H.$



8.3. Giải mạch đường dây dài đơn trong chế độ truyền sóng

Bài tập: Xét $u_{\text{tí i}}(t) = 1000 \cdot e^{-100t} \cdot \mathbf{1}(t); Z_C = 100\Omega; R_2 = 150\Omega;$

$$L_2 : \psi = 2i + 0,7i^3$$



8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

Mở rộng bài toán đường dây đơn: Khi cuối 1 đường dây, ngòai các phần tử *tập trung* ta có thêm 1 hoặc nhiều đường dây đấu nối tiếp.

→ Khi sóng đánh tới cuối đường dây thứ nhất, một phần năng lượng khúc xạ sẽ tạo thành *sóng khúc xạ* bắt đầu chạy từ đầu đường dây thứ 2. Đồng thời ta có $u_{1\text{-k.xạ}}(t)=Z_{C2}i_{1\text{-k.xạ}}(t)$

→ Khi xét các hiện tượng sóng đánh tới cuối đường dây thứ nhất, ta có đường dây phía sau tương đương với 1 *điện trở thuần* có giá trị bằng *tổng trở sóng* của đường dây thứ 2. Vì vậy trong mô hình Petersen, đường dây phía sau sẽ có thể được thay bằng 1 điện trở tương đương.

→ Nếu tại điểm nối có nhiều đường dây: Mỗi đường dây đều được thay bằng tổng trở sóng của mình.

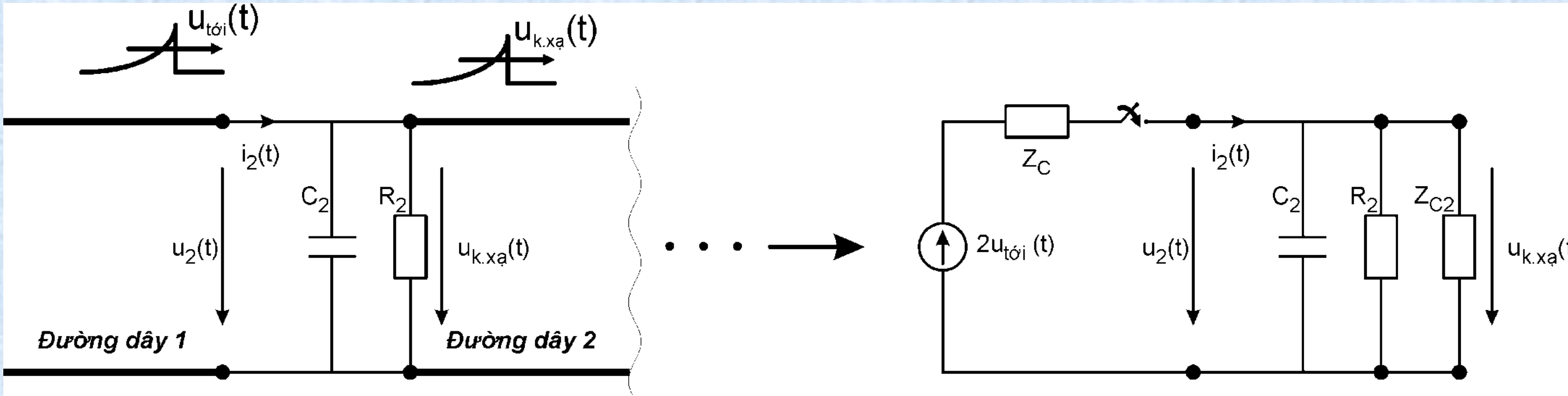
8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

– Trường hợp hệ thống điện phức tạp: Ta tính toán tuần tự theo quá trình lan truyền của sóng:

- Khi sóng chạy trên đường dây: chỉ có hiện tượng trễ
- Khi sóng chạy tới 1 điểm nối có tải hoặc có đường dây khác: sử dụng mô hình Petersen để tính thành phần khúc xạ, sau đó là tính thành phần phản xạ.
- Khi trên đường dây có nhiều thành phần sóng (do hiện tượng phản xạ và khúc xạ nhiều lần) thì giá trị *tức thời* của điện áp và dòng điện tại 1 điểm trên đường dây sẽ bằng tổng đại số các thành phần (tính chất xếp chồng)

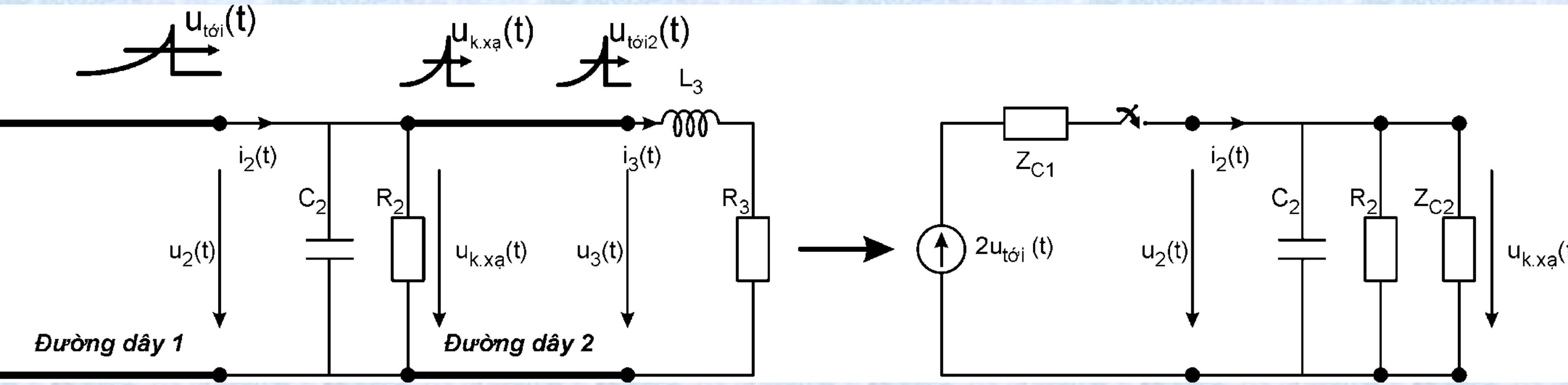
8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

- Ví dụ: hai đường dây nối tiếp



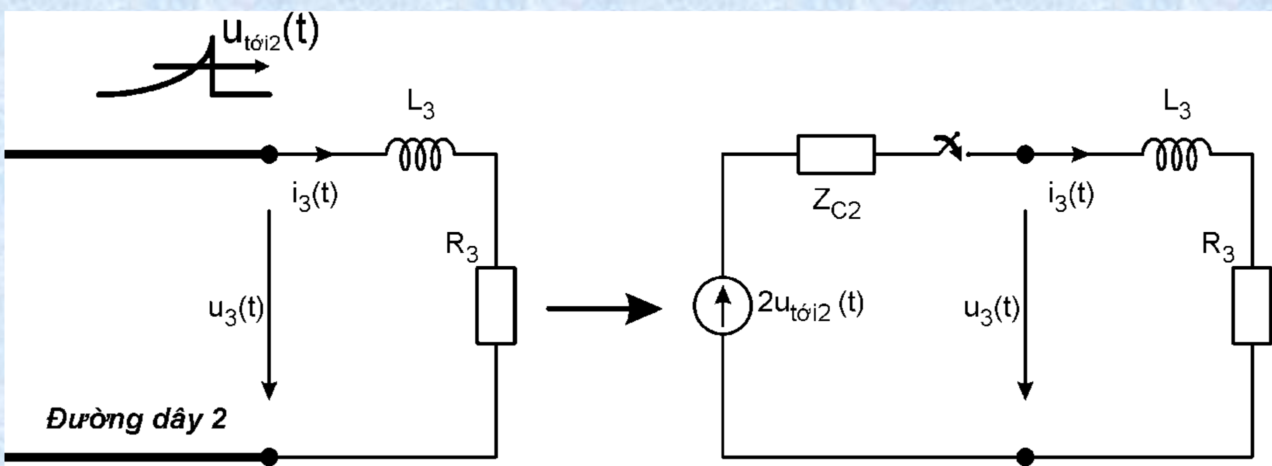
8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

– Ví dụ: hai đường dây nối tiếp



$$u_{tí\,i2}(t) = u_{k.x^1}(t - T_0)$$

$$T_0 = \frac{l_2}{v_2}$$



8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

– Ví dụ: nhiều đường dây nối tiếp

$$i_{k.x'2}(t) = \frac{u_{k.x'}(t)}{Z_{C2}}$$

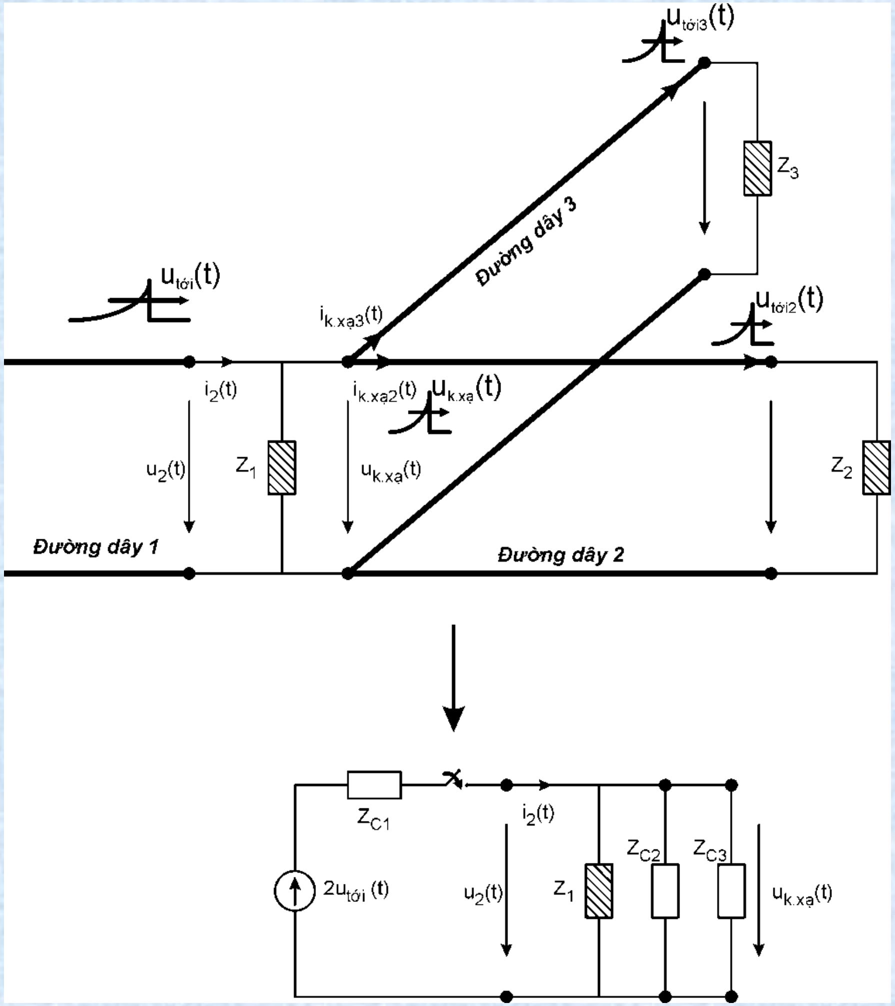
$$i_{k.x'3}(t) = \frac{u_{k.x'}(t)}{Z_{C3}}$$

$$u_{tíi2}(t) = u_{k.x'}(t - T_2)$$

$$T_2 = \frac{l_2}{v_2}$$

$$u_{tíi3}(t) = u_{k.x'}(t - T_3)$$

$$T_3 = \frac{l_3}{v_3}$$



8.4. Giải mạch nhiều đường dây trong chế độ truyền sóng

- Phản xạ nhiều lần (+ ví dụ trường hợp đặc biệt tải thuần trở, hở mạch, ngắn mạch, hòa hợp tải,…)

Tổng kết môn học và hướng phát triển ☺